Белешке из логике

Потпуност, компактност и последице

Милош Аџић

Београд
2022

Белешке из логике
Потпуност, компактност и последице

Белешке из логике

Потпуност, компактност и последице

Милош Аџић

Институт за филозофију
Београд

Издавач: Институт за филозофију, Универзитет у Београду, Филозофски факултет, Београд

За издавача: проф. др Живан Лазовић

Рецензенти: проф. др Слободан Вујошевић, проф. др Живан Лазовић, проф. др Зоран Петрић

Кључне речи: исказна логика, предикатска логика

Година издања: 2022

ISBN: 978-86-6427-214-8

Предговор

Ова је књига настала из бележака за курс Филозофија математике који сам, помажући Кости Дошену, више пута држао студентима завршне године студија Филозофског факултета у Београду. Курс је био замишљен тако да би се на предавањима, која су наликовала семинарима, читала и излагала класична дела из филозофије математике док су вежбе на том предмету студенте требало да упознају са Геделовим теоремама о непотпуности, филозофски најзанимљивијим резултатима логике.

Током година много је колега заједно са нама учествовало на том курсу. Захвалан сам Слободану Вујошевићу, Александру Перовићу, Зорану Петрићу, Томасу Пихи и Петеру Шредер-Хајстеру. Они нису сви у исто доба заједно са нама на том курсу учествовали, али је свако од њих у неко време учинио да он буде бољи. Посебно сам захвалан својим колегиницама, Јовани Костић и Катарини Максимовић које су, прво као наше студенткиње а касније и као млађе сараднице, великим ентузијазмом и филозофским еланом помогле Кости и мени да курс буде онакав каквим смо га и замислили.

Слободан Вујошевић, Борис Вуловић, Александра Зорић и Јована Костић су се потрудили да прочитају ову књигу и пуно су ми помогли својим примедбама. Зоран Петрић је одржао један последипломски курс из логике служећи се њоме. Његови и коментари његових ђака су ми били драгоцени. Свима им се најтоплије захваљујем.

Највећу захвалност дугујем Кости Дошену. Он ме је научио логици, филозофији и много чему другом. Да није било њега, не би било ни таквог курса нити овакве књиге. За све и само оно што је у њој добро, његова је заслуга највећа.

У Београду, октобра 2021.
М. А.

Садржај

Увод

“Begin at the beginning,” the King said gravely,
“and go on till you come to the end: then stop.”

— Луис Керол, *Алиса у земљи чуда*

Логика је наука о дедукцијама. Ова млада грана математике је зачета у радовима Готлоба Фрегеа с краја XIX века и своју је канонизацију доживела у првим деценијама XX века захваљујући, на првом месту, Давиду Хилберту и његовој школи. Наш предмет има јако дугу предисторију којом доминира Аристотелова силогистичка логика и која логику смешта међу филозофске, пре него математичке дисциплине. О томе, међутим, у овој књизи неће бити речи.

Логика је уско везана за појам језика. Језици које она проучава су вештачки, формални језици и много су једноставнији од природних језика. Та једноставност доноси са собом прецизност какве у природном језику нема. Баш као и природни, формални језици имају своју синтаксу или граматику. У синтакси полазимо од алфабета, скупа примитивних симбола помоћу којих у тим језицима градимо речи – коначне низове симбола. После тога треба да се каже које ћемо од тих речи да сматрамо граматички исправним и њих ћемо звати формулама наших језика. Дедукције у тим нашим језицима такође спадају у синтаксу. Са њима ћемо да се упознамо када будемо говорили о појму формалног система. Формалне системе можемо да замишљамо као апстрактне машине за произвођење формула које ћемо да зовемо теоремама тих формалних система.

Осим синтаксе, формални језици којима се логика бави имају и своју семантику. Њен је задатак да формулама наших језика припише значење, да те смислене речи интерпретира. У случају језика исказне логике, којим ћемо прво да се бавимо, та ће интерпретација да почива на појму валуације. Када се будемо бавили сложенијим језицима првог реда, место валуација ће да заузму релацијско-операцијске структуре или модели. И у једном и у другом случају се очекује да кажемо које ће формуле да буду истините у датој интерпретацији. Формуле које су истините у свакој интерпретацији биће логичке истине исказне логике, односно логике првог реда. У првом случају ћемо такве формуле да зовемо таутологијама а у другом ваљаним формулама.

На крају, посебно ће нас занимати однос између синтаксе и семантике наших језика. Два главна питања на која би требало да одговоримо јесу „Да ли је свака теорема логичка истина?" и „Да ли је свака логичка истина теорема?". Прво се питање тиче ваљаности наших формалних система док се друго односи на њихову потпуност. За исказну логику као и за логику првог реда одговор на оба ова питања биће потврдан.

У овом, првом делу књиге *Белешке из логике* представићемо неке од класичних резултата нашег предмета, закључно са *Теоремом потпуности* логике првог реда. Ту теорему је први доказао велики аустријски логичар Курт Гедел у својој докторској тези из 1929. године. Готово сви резултати о којима ћемо овде да говоримо настали су пре половине прошлог века. Иако започињемо са исказном логиком, ова књига није замишљена као први увод у логику. За то постоје боље књиге и заинтересовани читалац неће да погреши ако прво буде консултовао књигу *Основна логика* Косте Дошена [**5**], а после тога било коју од књига [**1**],[**2**], [**4**] или [**11**]. Ова је књига написана за читаоца који већ има неког искуства са основном логиком и жели да сазна нешто о резултатима нашег предмета који ту не спадају. Такође, она може да користи и онима који би да неке основне резултате виде у новом светлу. Као таква, она може да послужи и као део другог универзитетског курса из логике. Међутим, главно у вези са овом књигом је то што би она читаоца требало да припреми за други њен део који ће се тицати Геделових теорема о непотпуности и сродних резултата.

У припремању бележака из којих је ова књига настала највише смо се ослањали на Ендертонов уџбеник [**6**], како у погледу избора тема тако и у погледу стила којим је написан. Читалац ће, међутим, лако да примети да неке важне разлике у односу на Ендертонову књигу ипак постоје. Примера ради, код Ендертона нема формалног система за исказну логику а код аксиоматизације логике првог реда све су инстанце таутологија узете за аксиоме. За овакву књигу, чији би други део требало да се бави ограничењима једне велике класе важних формалних система, то није било најбоље решење. С једне стране, могао би да се стекне утисак да су дедукције у исказној логици нешто што је математички неинтересантно, а то је напросто погрешно. Са друге стране, чинило нам се сувислијим да теорему потпуности прво докажемо у једноставнијем случају исказне логике, па да после тога дамо нешто сложенији доказ исте теореме за логику првог реда.

Предност те, донекле измењене, Ендертонове аксиоматизације логике првог реда коју ћемо у овој књизи да представимо огледа се у томе што је за формалне системе те врсте једноставније доказати Геделове теореме о непотпуности и њима блиске резултате који ће се наћи у другом њеном делу. Осим [**6**], често нам је од помоћи била и Хинманова књига [**13**], Милетијеве [**8**] као и Ван ден Дрисове белешке [**3**], посебно до краја овог уводног дела.

У наставку овог поглавља увешћемо неке од основних математичких појмова којима ћемо да се служимо у наставку књиге. Сви они су са много више детаља изложени у Халмошевој [**12**] и Московакисовој књизи [**9**]. Тамо читалац може наћи и доказе бројних тврђења која смо ми само споменули. Ако жели још и више о теорији скупова да сазна, заинтересованог читаоца упућујемо на књигу [**10**]. Циљ овог поглавља је да, пре свега, фиксира терминологију и нотацију којима ћемо да се служимо.

Скупови, релације и функције. *Скупове* замишљамо као колекције математичких објеката. Те ћемо објекте звати *елементима* или *члановима* одговарајућих скупова. То да је објект x елемент скупа X записујемо као $x \in X$ – кажемо још да у том случају x *припада* скупу X. Ако x није елемент скупа X, то ћемо да записујемо овако $x \notin X$. На пример, имамо да $5 \in [4, \infty)$ и $0 \in \mathbb{N}$, али $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ и $\pi \notin \mathbb{Q}$. У наставку ћемо, као и овде, скупове природних, целих, рационалних и реалних бројева да означавамо са $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, тим редом. Словима n, m, i, j и k, са или без индекаса, ћемо да се служимо да њима реферирамо на природне бројеве.

Скупови X и Y су једнаки ако и само ако имају исте елементе и онда пишемо $X = Y$. Ово последње тврђење се често назива *принципом екстензионалности* и то је једна од аксиома теорије скупова **ZFC** о којој ћемо мало више да кажемо касније. Скупове ћемо често записивати тако што ћемо унутар витичастих заграда да излистамо њихове елементе. Тако је, примера ради, $\{3, 4, 8\}$ скуп чији су једини елементи $3, 4$ и 8. На основу принципа екстензионалности знамо да су скупови потпуно одређени својим елементима. Дакле, када је о скуповима реч не узимамо у обзир поредак нити број јављања њихових чланова; имамо да је $\{3, 4, 8\} = \{8, 3, 4\}$ као и $\{8\} = \{8, 8\}$. Скупове $\{x\}$ као што је последњи, који садрже само један елемент, зовемо *синглтонима.*

Празан скуп, скуп који нема елемената, означаваћемо са $\emptyset$ (на основу принципа екстензионалности, тај је скуп јединствен). Ако сви елементи скупа X припадају скупу Y, онда кажемо да је скуп X *подскуп* скупа Y и то записујемо као $X \subseteq Y$. Ако је $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$ то ћемо записивати као $X \subset Y$ – у том случају кажемо да је X *прави подскуп* од Y. Празан скуп је подскуп сваког скупа и сваки је скуп подскуп себе самог. Принцип екстензионалности одозго бисмо сада могли да изразимо овако: $X = Y$ ако и само ако је $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

У наставку ћемо често бити у прилици да дефинишемо скуп X тако што ћемо, пошавши од неког скупа Y, да издвајамо само оне његове елементе који задовољавају неко својство S:

$$X = \{x \in Y \mid x \text{ задовољава } S\}.$$

Другим речима, формирамо подскуп $X \subseteq Y$ који садржи све оне елементе који задовољавају поменуто својство. Примера ради, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ је скуп свих позитивних реалних бројева и то је један подскуп скупа $\mathbb{R}$.

Ако су X и Y скупови, служећи се њима можемо да формирамо њихов *пресек*:

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

За скупове X и Y кажемо да су *дисјунктни*, ако немају заједничких елемената, тј. ако је $X \cap Y = \emptyset$. *Унија* скупова X и Y је скуп:

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Бинарне операције уније и пресека можемо да посматрамо као посебне случајеве општијих операција које ћемо да опишемо у наставку. Нека је A колекција скупова, тј. скуп чији су елементи такође скупови. Тада можемо да формирамо и следећи скуп:

$$\bigcup A = \{x \mid \text{постоји } X \in A \text{ такво да је } x \in X\}.$$

Другим речима, елементи скупа $\bigcup A$ су сви елементи елемената скупа A. Скуп $\bigcup A$ зовемо *унијом скупа* A. Примера ради, ако је

$$A = \{\{1, 3, 5\}, \{7, 9\}, \{10\}\},$$

онда је $\bigcup A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$. Ако су X и Y скупови, онда ћемо имати да је

$$\bigcup\{X, Y\} = X \cup Y.$$

Слично томе, ако је A *непразна* колекција скупова, онда можемо да формирамо скуп:

$$\bigcap A = \{x \mid \text{за свако } X \in A \text{ важи } x \in X\},$$

који зовемо *пресеком скупа* A. Рецимо, ако за свако $n \geq 1$ узмемо да је X_n затворени интервал $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subseteq \mathbb{R}$ и

$$A = \{X_1, X_2, \dots\},$$

онда је $\bigcap A = \{0\}$. Опет ћемо, као и горе, имати да ако су X и Y скупови, онда је

$$\bigcap\{X, Y\} = X \cap Y.$$

Нешто касније ћемо видети да, служећи се појмом функције, скупове можемо да индексирамо. Операције пресека и уније ће нам бити занимљиве и у случају тако индексираних скупова.

Разлика скупова X и Y је следећи скуп:

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\}.$$

Такође, ако су нам дати скупови X и Y, онда можемо да формирамо и њихов *Декартов производ* $X \times Y$ овако:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}.$$

Елементи овог последњег скупа су *уређени парови* (x, y) где је x елемент првог а y елемент другог скупа. Нама неће бити посебно важно како је тачно овај појам дефинисан помоћу појма скупа – таквих дефиниција има више; оно што нам јесте важно је да ће тако дефинисани уређени парови бити једнаки ако и само ако су им одговарајуће координате једнаке, тј. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ако и само ако $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Да бисмо олакшали читање, у наставку ћемо често да пишемо „акко" место „ако и само ако" или ћемо за то просто да се послужимо симболом „$\Leftrightarrow$". Из истог разлога ћемо некипут, како смо раније у тексту већ чинили, да у дефиницијама пишемо само „ако" место „ако и само ако" иако строго говорећи то није сасвим коректно.

Партитивни скуп скупа X, скуп свих подскупова тог скупа, означаваћемо са $\mathfrak{P}(X)$. Приметимо само да је $\mathfrak{P}(\emptyset)$ непразан скуп – то је синглтон чији је једини елемент $\emptyset$. Ако је X скуп који има n елемената, онда није тешко индукцијом показати да ће скуп $\mathfrak{P}(X)$ имати 2^n елемената.

Функцију чине два скупа заједно са *правилом* које нам каже како сваком елементу првог скупа приписујемо тачно један елемент другог скупа. Појам правила можемо да изразимо нешто прецизније на следећи начин: функција f је једна тројка $f = (X, Y, G_f)$ скупова X, Y и G_f таквих да важи $G_f \subseteq X \times Y$ и за свако $x \in X$ постоји тачно једно $y \in Y$ такво да је $(x, y) \in G_f$. Место таквог јединственог y писаћемо $f(x)$ и кажемо да је то *вредност* функције f за *аргумент* x. Скуп X зовемо *доменом* функције f, скуп Y њеним *кодоменом* а скуп G_f *графом* те функције. Када будемо писали $f : X \to Y$, то ће значити да је f функција чији је домен скуп X а кодомен скуп Y. То читамо још и као *f је функција из X у Y*. Функције ћемо понекад да зовемо још и *пресликавањима*.

Узмимо неку функцију $f : X \to Y$. Кажемо да је f *на* функција или *сурјекција*, ако за свако $y \in Y$ постоји неко $x \in X$ такво да важи $f(x) = y$. Рецимо,

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad f(z) = z + 1 \\ g &: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad g(n) = n + 1 \end{aligned}$$

прва од ових функција јесте на функција, али друга то није – зато што не постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да је $g(n) = 0$.

За функцију $f : X \to Y$ кажемо да је 1-1 или *инјекција*, ако $x_1 \neq x_2$ повлачи $f(x_1) \neq f(x_2)$, за свако x_1 и x_2 из скупа X.

Примера ради,

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(n) = n + 1$$
$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad g(z) = z^2$$

прва је функција 1-1, али друга то није – зато што имамо да је $g(1) = 1 = g(-1)$.

За функцију f кажемо да је *бијекција*, ако је у исто време 1-1 и на функција. Дакле, $f : X \to Y$ је бијекција, ако за свако $y \in X$ постоји јединствено $x \in X$ такво да је $f(x) = y$.

Посматрајмо неку функцију $f : X \to Y$ и нека су $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$. Са $f[A]$ и $f^{-1}[B]$ ћемо да означавамо, редом, *слику* од A односно *инверзну слику* од B (у односу на функцију f). Те појмове дефинишемо на следећи начин:

$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y,$$

и

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X.$$

Приметимо да је функција f на, ако је $f[X] = Y$. *Рестрикција* функције f на A, коју ћемо да означавамо са $f \restriction A$, је дефинисана као $f \restriction A(x) = f(x)$, за свако $x \in A$.

За сваки скуп X постоји *идентичка функција* $1_X : X \to X$ коју дефинишемо као:

$$1_X(x) = x, \text{ за свако } x \in X.$$

Композиција функција $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ је функција $g \circ f : X \to Z$, која је дефинисана као:

$$(g \circ f)(x) = g\left(f\left(x\right)\right), \text{ за свако } x \in X.$$

За сваку функцију $f : X \to Y$ имамо да важи $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$. Када је функција $f : X \to Y$ бијекција, онда постоји њој *инверзна* функција $f^{-1} : Y \to X$ за коју важи: $f^{-1}(y) =$ јединствено $x \in X$ такво да је $f(x) = y$. У том случају ћемо имати да је $f^{-1} \circ f = 1_X$ и $f \circ f^{-1} = 1_Y$.

Ако су I и X скупови, онда постоји скуп свих функција $f : I \to X$ који ћемо да означавамо са X^I. Ако је $I = \{1, \ldots, n\}$, онда ћемо тај скуп да записујемо као X^n место X^I. Елементи скупа X^n су пресликавања $x : \{1, \ldots, n\} \to X$ која ћемо често да поистовећујемо са $n-$*торкама* или *низовима* са n чланова $(x(1), \ldots, x(n))$ и да притом пишемо x_i место $x(i)$, за $1 \leq i \leq n$. Дакле, у наставку ћемо елементе скупа X^n да замишљамо као $n-$торке $(x_1, \ldots, x_n)$; скуп X^0 има један елемент и то је празна $n-$торка.

Подскуп скупа X^n ћемо звати $n-$*арном релацијом* на X. Пресликавање из X^n у X зовемо $n-$*арном оūерацијом* на скупу X. За $n = 0, 1, 2$ одговарајуће релације и операције ћемо звати, редом, *нуларним*, *унарним* и *бинарним.* Ако је R бинарна релација, онда је обичај да пишемо $x_1 R x_2$ место $(x_1, x_2) \in R$ као и $x_1 \not R x_2$ место $(x_1, x_2) \notin R$.

Са $(x_i)_{i \in I}$ ћемо да означавамо *фамилију* објеката x_i индексираних скупом I. Други начин да ову фамилију представимо јесте као следећи скуп уређених парова

$$\{(i, x_i) \mid i \in I\}.$$

Када је $I = \mathbb{N}$ такве фамилије обично зовемо (*бесконачним*) *низовима.*

Ако нам је дата непразна фамилија скупова $(X_i)_{i \in I}$, онда можемо да формирамо скуп

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \mid x \in X_i \text{ за свако } i \in I\}$$

који зовемо пресеком ове фамилије или просто пресеком скупова X_i. Другим речима, имаћемо да важи:

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap \{X_i \mid i \in I\},$$

где претпостављамо да је скуп I непразан. Слично томе, за фамилију скупова $(X_i)_{i \in I}$ имамо и следећи скуп

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \mid x \in X_i \text{ за неко } i \in I\}.$$

Тај скуп зовемо унијом фамилије $(X_i)_{i \in I}$, или пак унијом скупова X_i. Као и горе, имаћемо да важи:

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup \{X_i \mid i \in I\}.$$

На крају, скуп

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i \text{ за свако } i \in I\}.$$

зовемо *ūроизводом* фамилије $(X_i)_{i \in I}$.

Сви скупови о којима смо до сада говорили као и они о којима ћемо у наставку да говоримо су такви да њихово постојање може да се докаже у Цермело-Френкел теорији скупова. То је једна теорија првог реда која заснива читаву математику и на коју ћемо да реферирамо са **ZFC**. Слово **C** у **ZFC** означава *аксиому избора*. Када у наставку будемо писали само **ZF** подразумеваћемо, дакле, теорију **ZFC** *без* те аксиоме. Аксиома избора каже да за произвољну фамилију $(X_i)_{i\in I}$ непразних скупова, постоји фамилија $(x_i)_{i\in I}$ таква да $x_i \in X_i$, за свако $i \in I$. Другим речима, производ фамилије непразних скупова је непразан. Да бисмо боље разумели како је ова аксиома добила име приметимо само да, на основу онога што смо раније рекли, производ фамилије скупова $(X_i)_{i\in I}$ није ништа друго него следећи скуп:

$$\{f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid f(i) \in X_i \text{ за свако } i \in I\}. \tag{$*$}$$

Другим речима, то је скуп свих функција f из I у $\bigcup_{i\in I} X_i$, таквих да за свако $i \in I$ имамо да важи $f(i) \in X_i$. Овакве се функције зову *функције избора* јер можемо да их разумемо тако као да истовремено „бирају" по један елемент из сваког од чланова фамилије $(X_i)_{i\in I}$. Аксиома избора онда тврди да за сваку фамилију непразних скупова $(X_i)_{i\in I}$ постоји функција избора, тј. да је скуп $(*)$ непразан.

Релације еквиваленције. За бинарну релацију $\equiv$ на скупу X кажемо да је *релација еквиваленције*, ако важи следеће:

(1) $x \equiv x$, за свако $x \in X$ (рефлексивност);
(2) ако $x \equiv y$, онда $y \equiv x$, за свако $x, y \in X$ (симетричност);
(3) ако $x \equiv y$ и $y \equiv z$, онда $x \equiv z$, за свако $x, y, z \in X$ (транзитивност).

Примера ради, ако је X скуп свих троуглова у равни, онда је подударност релација еквиваленције на том скупу. Исто важи и за релацију сличности троуглова. Као још један пример, посматрајмо скуп X чији су елементи скупови и бинарну релацију R на X такву да важи: xRy акко постоји бијекција $x \to y$. За сваки скуп $x \in X$ имамо идентичку функцију 1_x која је бијекција, па је релација R рефлексивна. Ако је $f : x \to y$ бијекција, онда је то и функција $f^{-1} : y \to x$, па је релација R симетрична. На крају, композиција бијекција за резултат даје бијекцију, па ће релација R бити транзитивна и тиме једна релација еквиваленције на скупу X.

Нека је $\equiv$ релација еквиваленције на скупу X и x елемент тог скупа. *Класа еквиваленције* од x коју ћемо да означавамо са $[x]_\equiv$ је подскуп скупа X који дефинишемо на следећи начин:

$$[x]_\equiv = \{y \in X \mid x \equiv y\}.$$

За $x, y \in X$ имамо да $x \in [x]_{\equiv}$, као и да је $[x]_{\equiv} = [y]_{\equiv}$, ако и само ако важи $x \equiv y$. Са друге стране, $[x] \cap [y] = \emptyset$ ако и само ако важи $x \not\equiv y$. *Количнички скуп од* X (у односу на релацију $\equiv$) дефинишемо на следећи начин:

$$X/_{\equiv} = \{[x]_{\equiv} \mid x \in X\}.$$

Количнички скуп $X/_{\equiv}$ је *партиција* скупа X – колекција дисјунктних непразних подскупова од X чија је унија скуп X. Важи и обрнуто, свакој партицији скупа X одговара јединствена релација еквиваленције на том скупу.

Као илустрацију појмова које смо управо увели, узмимо да је X скуп свих правих у уобичајеној еуклидској равни. Нека је $\parallel$ бинарна релација на том скупу таква да важи $x \parallel y$ ако и само ако су праве x и y паралелне или се поклапају. Јасно је да је $\parallel$ једна релација еквиваленције. За сваку праву $x \in X$, класа еквиваленције $[x]_{\parallel}$ садржи, поред x, све праве које су јој паралелне. Све оне скупа деле заједнички „правац”. Тако бисмо за партицију $X/_{\parallel}$ могли да кажемо да нам даје скуп свих могућих праваца правих у равни.

Уређења. Нека је X скуп и $<$ бинарна релација на X. Кажемо да је $(X, <)$ *парцијално уређење* ако важи следеће:

(1) $x \not< x$, за свако $x \in X$ (ирефлексивност);

(2) ако $x < y$ и $y < z$, онда $x < z$, за свако $x, y, z \in X$ (транзитивност).

Парцијално уређење $(X, <)$ је *линеарно* или *тотално*, ако важи још и:

(3) $x < y$ или $x = y$ или $y < x$, за свако $x, y \in X$ (тоталност).

За уређења $(X, <)$ кажемо и да су *строга* парцијална или линеарна уређења. Приметимо само да су таква уређења нужно *асиметрична*, тј. за свако $x, y \in X$ имамо да је $x \not< y$ или $y \not< x$. То је једноставно да се види јер ако за неке $x, y \in X$ имамо да важи $x < y$ и $y < x$, онда на основу транзитивности следи да је $x < x$, што противречи ирефлексивности.

Ако нам је дато строго парцијално уређење $(X, <)$ можемо да дефинишемо одговарајуће уређење $(X, \leq)$ – које није строго – тако што ћемо узети да је $x \leq y$ скраћеница за $x < y$ или $x = y$. Могли смо, наравно, да урадимо и обрнуто: да парцијално уређење дефинишемо у односу на релацију $\leq$ (која би у том случају требало да буде рефлексивна, антисиметрична и транзитивна), па да онда $x < y$ узмемо као скраћеницу за $x \leq y$ и $x \neq y$ (да је релација $\leq$ на скупу X антисиметрична значи да за свако $x, y \in X$ важи: ако

$x \leq y$ и $y \leq x$, онда $x = y$; в. Пример 4.1). Другим речима, ако је релација (X, S) строго парцијално уређење и

$$R = S \cup \{(x, x) \mid x \in X\},$$

онда је (X, R) парцијално уређење. Са друге стране, ако је (X, R) парцијално уређење и

$$S = R \setminus \{(x, x) \mid x \in X\},$$

онда је (X, S) строго парцијално уређење.

Примера ради, ако је $X = \{x, y, z\}$ и

$$R = \{(x, x), (x, y), (x, z), (y, y), (z, z)\} \tag{$\star$1}$$

онда је (X, R) парцијално уређење. Такође, посматрајмо скуп $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ и бинарну релацију $\leq_d$ на $\mathbb{N}^+$ дефинисану на следећи начин, за свако $n, m \in \mathbb{N}^+$:

$$n \leq_d m \Leftrightarrow n \mid m \tag{$\star$2}$$

где $n \mid m$ значи да n дели m, тј. постоји $k \in \mathbb{N}^+$ такво да је $n \cdot k = m$. Тада је $(\mathbb{N}^+, \leq_d)$ опет једно парцијално уређење.

Узмимо сада да је $Y = \{2, 4, 7\} \subseteq \mathbb{N}^+$ и нека је $\leq_Y$ *рестрикција* релације $\leq_d$ на скуп Y, тј. $\leq_Y = \leq_d \cap Y \times Y$ (релацију $\leq_d$ тада зовемо *проширењем* релације $\leq_Y$). Онда ћемо имати да је

$$\leq_Y = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (7, 7)\},$$

па је и $(Y, \leq_Y)$ једно парцијално уређење. То ће да важи и у општем случају: ако је $(X, \leq)$ парцијално уређење, $Y \subseteq X$ и $\leq_Y$ рестрикција релације $\leq$ на скуп Y, онда је и $(Y, \leq_Y)$ такође парцијално уређење. Ако је $(Y, \leq_Y)$ поврх тога и линеарно уређење, онда за Y кажемо да је *ланац* у $(X, \leq)$. Када је о сличним случајевима реч, обе релације $\leq$ и $\leq_Y$ ћемо најчешће да означавамо симболом $\leq$, да бисмо поједноставили нотацију. Из контекста ће међутим бити јасно на коју релацију том приликом тачно мислимо.

Да бисмо мало боље илустровали пример проширења неке релације посматрајмо следећи пример. Нека је $(X, <_p)$ парцијално уређење, где је $X = \{a, b, c, d, e\}$ и

$$<_p = \{(a, b), (c, b), (d, a), (d, b), (d, c), (d, e), (e, b)\}.$$

Онда можемо да проширимо релацију $<_p$ до релације $<_l$ коју дефинишемо као транзитивно затворење (то је најмања транзитивна релација која шири дату релацију) од

$$d <_l e <_l c <_l a <_l b.$$

Резултат тог проширења ће бити линеарно уређење $(X, <_l)$. Свако коначно парцијално уређење може да се прошири до линеарног уређења. Да ово тврђење важи и у случају бесконачних парцијалних уређења видећемо нешто касније када будемо говорили о последицама *Теореме компактности* (2.4) исказне логике.

На крају, важан пример парцијалних уређења о којима ћемо мало више да кажемо касније јесте и следећи. Ако посматрамо произвољан скуп X и његов партитивни скуп $\mathfrak{P}(X)$, онда на елементима од $\mathfrak{P}(X)$ можемо да дефинишемо:

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Са овако дефинисаном релацијом $\leq$ имамо да је $(\mathfrak{P}(X), \leq)$ једно парцијално уређење (које није линеарно ако скуп X има више од једног елемента).

Ако је $(X, <)$ парцијално или линеарно уређење, онда ћемо у наставку често и саму релацију $<$ тако да зовемо; из контекста ће увек да буде јасно на који скуп носач притом мислимо.

Посматрајмо сада једно парцијално уређење $(X, \leq)$ и нека је $x \in X$. За x кажемо да је *минималан* елемент тог парцијалног уређења ако за свако $y \in X$ важи: ако је $y \leq x$, онда је $y = x$. Аналогно томе, за x кажемо да је *максималан* елемент тог парцијалног уређења ако за свако $y \in X$ важи: ако је $x \leq y$, онда је $y = x$. За x кажемо да је *најмањи* елемент или *минимум* нашег парцијалног уређења, ако за свако $y \in X$ имамо да важи $x \leq y$. Слично томе, кажемо да је x *највећи* елемент или *максимум*, ако за свако $y \in X$ важи $y \leq x$.

Примера ради, у парцијалном уређењу ($\star 1$) одозго, y и z су максимални али не и највећи елементи. Са друге стране, x је минималан и најмањи елемент тог парцијалног уређења. Јасно је да ако је x најмањи, односно највећи елемент неког парцијалног уређења, онда је он и минималан, односно максималан елемент тог уређења. Такође, ако најмањи или највећи елементи постоје, онда су они јединствени. Са друге стране, парцијално уређење може да има више минималних или максималних елемената, као у претходном примеру, а таквих елемената може и да уопште не буде. Рецимо, у парцијалном уређењу ($\star 2$) горе, 1 је најмањи елемент, док максималних елемената нема. Ако сада узмемо рестрикцију те релације на скуп $\mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$, онда у овом парцијалном уређењу има бесконачно много минималних елемената и то су прости бројеви. Ако у неком парцијалном уређењу $(X, \leq)$ има више минималних, односно максималних елемената, онда су они *неупоредиви*. То значи да ћемо за такве x и y имати да нити важи $x \leq y$ нити пак $y \leq x$. У линеарним уређењима су, на основу тоталности, сви елементи упоредиви па ће минимални елементи бити најмањи а максимални највећи.

Ако су $(X, <_X)$ и $(Y, <_Y)$ два парцијална уређења, онда за функцију $f : X \to Y$ кажемо да је *изоморфизам* ако је f бијекција и за свако $x_1, x_2 \in X$ имамо да важи

$$x_1 <_X x_2 \Leftrightarrow f(x_1) <_Y f(x_2).$$

У том случају кажемо још да су уређења $(X, <_X)$ и $(Y, <_Y)$ *изоморфна*.

Рецимо, лако је видети да је функција $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ дефинисана као $f(z) = -z$ бијекција. Такође је једноставно видети да је ова бијекција изоморфизам линеарних уређења $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Z}, >)$, где су $<$ и $>$ уобичајена уређења на скупу целих бројева. Као илустрацију примера који смо дали нешто раније, приметимо само још да ако је $(X, \leq)$ парцијално уређење, онда је оно изоморфно са $(Z, \subseteq)$, где је Z нека колекција скупова и $\subseteq$ релација подскупа на Z. Да бисмо то видели, узмимо да је

$$Z = \{\{y \mid y \leq x\} \mid x \in X\}.$$

Одговарајући изоморфизам $f : X \to Z$ је сада сасвим једноставно дефинисати.

За релацију $R \subseteq X \times X$ кажемо да је *добро заснована* ако за сваки непразан подскуп $Y \subseteq X$ постоји $z \in Y$ такво да је $y \not{R} z$ за свако $y \in Y \setminus \{z\}$. За релацију кажемо да је *строго добро заснована* ако је ирефлексивна и добро заснована. Ако је $\leq$ парцијално уређење на X, онда је оно добро засновано ако за сваки непразан подскуп $Y \subseteq X$ парцијално уређење $(Y, \leq)$ има минималан елемент. У случају линеарних уређења ћемо имати, како смо већ напоменули, да су она добро заснована ако сваки непразан подскуп таквог уређења има најмањи елемент. Таква линеарна уређења зовемо *добрим уређењима*. Примера ради, уобичајене релације $\leq$ и $<$ су добра уређења на скупу $\mathbb{N}$. Са друге стране, иако $(\mathbb{Z}, <)$, где је $<$ уобичајено уређење на $\mathbb{Z}$ јесте линеарно уређење, оно није добро уређење.

Вероватно најпознатије тврђење које се тиче појма доброг уређења је *Цермелова теорема*: сваки скуп може добро да се уреди. Нешто прецизније говорећи, за сваки скуп X постоји бинарна релација $\leq$ на X, таква да је $(X, \leq)$ добро уређење. Важно је знати да је *Цермелова теорема* у теорији **ZF** еквивалентна аксиоми избора. На ту аксиому ћемо често да се ослањамо у следећем одељку, али то нећемо посебно да назначавамо. Из књига које смо раније навели читалац може да сазна који резултати не могу да се докажу без ове аксиоме или неког њој еквивалентног тврђења.

Кардиналност. За скуп X кажемо да је *коначан*, ако постоји природан број n и бијекција $f : X \to \{1, \ldots, n\}$. За $n = 0$ ћемо имати да је $\{1, \ldots, n\} = \emptyset$. Тај јединствени природан број n нам говори колико скуп X има елемената и ми ћемо га звати *кардиналношћу* тог скупа. Кардиналност скупа X ћемо означавати са $|X|$. За неки скуп кажемо да је *бесконачан*, ако није коначан.

Дакле, кардиналност неког коначног скупа X је јединствени природан број n такав да постоји бијекција $X \to \{1, \ldots, n\}$ или, еквивалентно томе, бијекција $X \to \{0, \ldots, n-1\}$. У теорији скупова је обичај да природне бројеве поистовећујемо са скупом свих њихових претходника. У том контексту, природан број n исто је што и скуп $\{0, \ldots, n-1\}$. Имамо, дакле да је:

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset, \\
&1 = \{0\}, \\
&2 = \{0, 1\}, \text{ итд.}
\end{aligned}
$$

У општем случају имамо да је:

$$n + 1 = n \cup \{n\}.$$

Дакле, у теорији скупова издвајамо неке посебне скупове које зовемо *кардиналима*, *кардиналним бројевима* или кардиналностима, како смо ми то горе чинили. Сваки природан број $n = \{0, \ldots, n-1\}$ је кардинал, али је то такође и скуп природних бројева $\mathbb{N}$. Када желимо да тај скуп посматрамо као кардинал, обично на њега реферирамо као на $\aleph_0$. Важно је знати да за сваки скуп X, био он коначан или бесконачан, постоји јединствени кардинал κ такав да постоји бијекција $X \to \kappa$. Као и у случају коначних скупова, ово κ зовемо кардиналношћу скупа X и означавамо га са $|X|$. Дакле, имамо да важи $|\kappa| = \kappa$ и за произвољне скупове X и Y:

$$|X| = |Y| \Leftrightarrow \text{ постоји бијекција } X \to Y.$$

За скуп X кажемо да је *пребројиво бесконачан*, ако постоји бијекција $X \to \mathbb{N}$. Скуп X је *пребројив*, ако је коначан или пребројиво бесконачан. Скупове који нису пребројиви зовемо *непребројивим*. Пример таквог скупа је скуп реалних бројева $\mathbb{R}$. Да је скуп X пребројиво бесконачан је еквивалентно са $|X| = \aleph_0$.

Природни бројеви су *коначни* кардинали. Сви други кардинали су *бесконачни*.

За кардинале κ и λ ћемо писати $\kappa \leq \lambda$ ако постоји инјекција $\kappa \to \lambda$. Такође, писаћемо $\kappa < \lambda$ ако је $\kappa \leq \lambda$ и $\kappa \neq \lambda$. Ако су $\kappa = m$ и $\lambda = n$ коначни, онда се то слаже са уобичајеним значењем од $m \leq n$, а то је у овом контексту еквивалентно са $m \subseteq n$. То међутим не важи само за коначне кардинале. Ако су κ и λ произвољни кардинали, онда имамо да је

$$\kappa \leq \lambda \Leftrightarrow \kappa \subseteq \lambda.$$

Ако су κ, λ и μ кардинали, онда на основу претходно реченог имамо да је $\kappa \leq \kappa$ као и да $\kappa \leq \lambda$ и $\lambda \leq \mu$ заједно повлаче $\kappa \leq \mu$. Да је ова релација антисиметрична, тј. да $\kappa \leq \lambda$ и $\lambda \leq \kappa$ заједно повлаче $\kappa = \lambda$ је нешто теже да се провери и то је садржај *Кантор-Бернштајнове теореме.* Осим тога, такође важи и да је $\kappa \leq \lambda$ или $\lambda \leq \kappa$ па је ова релација линеарно уређење на *класи* свих кардинала – кардинали чине такозвану *праву класу*; има их сувише да би могли чинити скуп.

За сваки бесконачан кардинал κ ћемо имати да важи $n < \aleph_0 \leq \kappa$, па је значи $\aleph_0$ најмањи бесконачан кардинал. Осим тога, за сваки кардинал постоји кардинал који је од њега већи и увек постоји најмањи такав. Тако ћемо, примера ради, имати да важи

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_{\aleph_0} < \ldots$$

Операције сабирања и множења кардинала уопштавају уобичајене операције сабирања и множења природних бројева на бесконачне скупове. Ако су X и Y дисјунктни скупови такви да важи $|X| = \kappa$ и $|Y| = \lambda$, онда имамо да је

$$\kappa + \lambda = |X \cup Y|, \qquad \kappa \cdot \lambda = |X \times Y|.$$

Обе ове операције су асоцијативне и комутативне. Оне су у извесном смислу тривијалне када је реч о бесконачним кардиналима. Наиме, ако је макар један од кардинала κ, λ бесконачан, онда је $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. Такође, ако је макар један од кардинала κ, λ бесконачан а други различит од 0, онда је опет $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

Унија пребројиво много пребројивих скупова чини пребројив скуп. Ово је само посебан случај, за $\kappa = \aleph_0$, следећег општијег резултата:

Теорема. *Нека је κ бесконачан кардинал и $(X_i)_{i \in I}$ фамилија скупова таквих да важи $|I| \leq \kappa$ и $|X_i| \leq \kappa$, за свако $i \in I$. Онда је $|\bigcup_{i \in I} X_i| \leq \kappa$.*

Идеја доказа јесте да покажемо да постоји инјекција

$$\bigcup_{i\in I} X_i \to \kappa\times\kappa,$$

из чега онда може да се закључи да је

$$\left|\bigcup_{i\in I} X_i\right| \leq \kappa\cdot\kappa.$$

Резултат

$$\left|\bigcup_{i\in I} X_i\right| \leq \kappa$$

ће онда да следи на основу *Хесенбергове теореме* која каже да за сваки бесконачан кардинал κ имамо да важи $\kappa\cdot\kappa=\kappa$.

Ако је X скуп, са X^* ћемо да означавамо скуп свих $n-$торки елемената скупа X. Другим речима:

$$X^* = \bigcup_{n\geq 0} X^n.$$

Нешто касније, када будемо говорили о појму језика, тај ће нам скуп бити посебно важан. За сада, желимо само да формулишемо следећу последицу претходне теореме која ће нам користити у наставку:

Последица. *Нека је κ бесконачан кардинал и X скуп такав да важи $|X|\leq\kappa$. Онда је $|X^*|\leq\kappa$.*

Доказ. Приметимо прво да је $|X^0| = 1 \leq \kappa$ и да је осим тога $|X^1| = |X| \leq \kappa$. Ако претпоставимо да је $|X^n|\leq\kappa$, онда можемо да се послужимо бијекцијом $X^{n+1}\to X^n\times X$ да бисмо могли да закључимо да је $|X^{n+1}| = |X^n\times X| \leq \kappa\cdot\kappa=\kappa$. Дакле, индукцијом смо показали да за свако n важи да је $|X^n|\leq\kappa$. На основу претходне теореме онда следи да је $|X^*|\leq\kappa$. $\dashv$

Језици. Један од главних појмова којима ћемо да се бавимо у овој књизи је појам *језика*. Природни као и вештачки језици који ће да нас овде занимају имају свој *алфабет* и речи тих језика градимо тако што записујемо низове слова из алфабета. Алфабет ће за нас бити скуп, који ћемо најчешће да означавамо са $\mathscr{A}$. Речи нашег језика ће онда бити $n-$торке елемената од $\mathscr{A}$.

Узмимо сада да је $\mathscr{A}$ скуп и да је, као и горе, $\mathscr{A}^n$ скуп свих $n-$торки $(a_1,\ldots,a_n)$ елемената од $\mathscr{A}$. Такве елементе ћемо звати *словима* или *симболима*, док ћемо елементе скупа $\mathscr{A}^n$ да зовемо *речима* или *изразима* алфабета $\mathscr{A}$ *дужине* n. Пошто у овом контексту наше $n-$торке замишљамо као речи, писаћемо их просто као $a_1 \dots a_n$, без заграда и запета. Узимаћемо да је $\mathscr{A}^0 = \{\varepsilon\}$, где је ε празна реч у којој нема слова.

Сада можемо да дефинишемо следеће скупове:

$$\mathscr{A}^+ = \bigcup_{n \geq 1} \mathscr{A}^n \qquad \mathscr{A}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathscr{A}^n = \mathscr{A}^+ \cup \{\varepsilon\}.$$

Примера ради, ако је $\mathscr{A} = \{a, b\}$, онда је

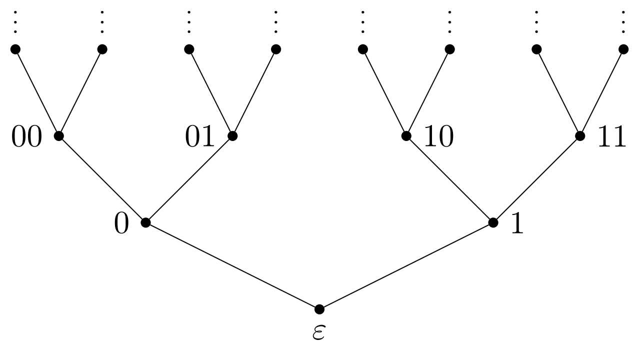
$$\mathscr{A}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa, \dots\}.$$

Ако су $\alpha = a_1 \dots a_n$ и $\beta = b_1 \dots b_m$ елементи скупа $\mathscr{A}^*$, онда ћемо са $\alpha\beta$ да означавамо реч $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ коју зовемо *конкатенацијом* речи α и β. На пример, ако је $\alpha = aba$ и $\beta = bab$, онда је њихова конкатенација $\alpha\beta = ababab$. Конкатенација речи је бинарна операција на скупу $\mathscr{A}^*$, која је асоцијативна, тј. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$; поред тога важи још и $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$, за произвољне речи $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{A}^*$. Такође, за ову операцију важи својство канцелације с лева као и здесна, тј. за произвољне речи $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{A}^*$ ако је $\alpha\beta = \alpha\gamma$, онда је $\beta = \gamma$ и ако је $\beta\alpha = \gamma\alpha$, онда је $\beta = \gamma$. Заједно са операцијом конкатенације скуп $\mathscr{A}^+$ чини семигрупу - то је *слободна семигрупа* на алфабету $\mathscr{A}$, док $\mathscr{A}^*$ има структуру моноида - и то је *слободан моноид* на $\mathscr{A}$.

Ако је α реч на алфабету $\mathscr{A}$, онда ћемо њену *дужину* (број симбола које та реч садржи) да означавамо са $|\alpha|$ – из контекста ће бити јасно да ли говоримо о дужини неке речи или кардиналности неког скупа. *Подреч* од α је реч $\beta \in \mathscr{A}^*$, таква да постоје речи $\gamma, \delta \in \mathscr{A}^*$ за које важи $\alpha = \gamma\beta\delta$. Ако је $\alpha = \beta\gamma$, онда кажемо да је β *иницијални* а γ *крајњи сегмент* од α. За иницијални сегмент β од α кажемо да је *непразан* ако је $\beta \neq \varepsilon$; такође за β кажемо да је *прави* иницијални сегмент од α ако је $\gamma \neq \varepsilon$. Слично важи и за крајње сегменте речи α.

Језик $\mathscr{L}$ на алфабету $\mathscr{A}$ је произвољан, коначан или бесконачан подскуп од $\mathscr{A}^*$. Приметимо само, пошто ће нам то бити важно касније, да ако је алфабет $\mathscr{A}$ кардиналности κ, где је κ произвољан бесконачни кардинал, онда је кардиналност од $\mathscr{A}^*$ такође κ. То следи на основу Последице из претходног одељка. Посебно, ако је $\mathscr{A}$ пребројиво бесконачан, а такви ће бити алфабети језика којима ћемо у овој књизи да се бавимо, онда ће и скуп свих речи на таквом алфабету да буде исто такав.

Дрвета. Још један појам којим ћемо у наставку на неколико места да се послужимо јесте појам дрвета. Тај појам може да се



Слика 1. Дрво $(\{0,1\}^*, \prec)$

дефинише на различите начине. Дефиниција коју ћемо ми овде да дамо није ни једина нити најопштија. Она ће просто да буде најподеснија за оно што ћемо касније о дрветима имати да кажемо.

Парцијално уређење $(T, \prec)$ је *дрво*, ако важи следеће:

(1) постоји јединствен најмањи елемент $t_0 \in T$, који зовемо *корен*;

(2) за свако $t \in T$, скуп

$$Pr(t) = \{s \in T \mid s \prec t\}$$

је коначан и линеарно уређен релацијом $\prec$.

Елементе скупа T зовемо *чворовима* дрвета $(T, \prec)$. Дрво је *коначно* ако је скуп његових чворова коначан. Иначе, за дрво кажемо да је *бесконачно*.

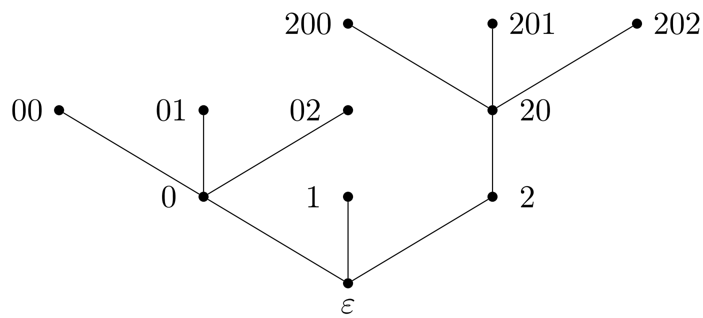
Примера ради, посматрајмо скуп свих речи на алфабету $\{0,1\}$. Такве речи, елементи скупа $\{0,1\}^*$, зову се коначни *бинарни низови*. На скупу $\{0,1\}^*$ можемо да дефинишемо релацију $\prec$ овако: за $s, t \in \{0,1\}^*$ узмимо да важи $s \prec t$ ако и само ако је s прави иницијални сегмент од t. Да бисмо се уверили да су у овом случају задовољени услови (1) и (2) из дефиниције дрвета горе, приметимо да је празан низ ε прави иницијални сегмент сваког другог низа из $\{0,1\}^*$ као и да су прави иницијални сегменти неког низа линеарно уређени релацијом $\prec$ одозго. Ако на пример узмемо низ $s = 001101$, онда имамо да је

$$\varepsilon \prec 0 \prec 00 \prec 001 \prec 0011 \prec 00110 \prec s.$$

Дрво $(\{0,1\}^*, \prec)$ које смо управо описали зове се *потпуно бинарно дрво*. Део тог дрвета можемо да представимо као на Слици 1.

Ако бисмо се ослонили на претходни пример, могли бисмо појам дрвета да дефинишемо и овако. Прво, ако је s низ дужине m (не нужно бинарни) и имамо да је $n \leq m$, онда ћемо са $s \upharpoonright n$ да означавамо иницијални сегмент од s дужине n. Примера ради, за $s = 001101$ као у примеру горе, имамо да је $s \upharpoonright 3 = 001$. У том случају можемо рећи да је T дрво, ако је T скуп низова такав да за свако $s \in T$ дужине n и свако $l < n$, имамо да важи $s \upharpoonright l \in T$.

Ако је $s \in T$, онда тај низ одређује један коначан пут од корена – у коме се налази празан низ ε дужине 0 – до чвора у дрвету који том низу одговара. Два чвора s и t у дрвету су непосредно повезана ако можемо да добијемо један низ из другог тако што ћемо му додати последњи члан, тј. ако је $s \upharpoonright (n-1) = t$, када је s дужи од два низа и дужине n. Важи наравно обрнуто у случају да је t дужи од ова два низа. Ево још једног примера, у овом случају коначног дрвета:



Следећих неколико појмова везаних за појам дрвета ће нам користити у наставку. Нека је $(T, \prec)$ једно дрво. За свако $t \in T$, *висину од* t дефинишемо као:

$$h_T(t) = |Pr_T(t)|.$$

За свако $n \geq 0$, $n-$*ти ниво од* T је дефинисан као:

$$L_T(n) = \{t \in T \mid h_T(t) = n\}.$$

На крају, за свако $t \in T$, *скуп непосредних следбеника* од t је дефинисан као:

$$\hat{t} = \{s \in T \mid t \prec s \text{ и } h_T(s) = h_T(t) + 1\}.$$

За дрво T кажемо да је *коначно гранајуће* ако и само ако свако $t \in T$ има највише коначно много непосредних следбеника. *Грана* B у T је максималан, линеарно уређени подскуп од T (максималан у смислу да не може даље да се шири у T).

Послужићемо се примером одозго да бисмо неке од ових појмова илустровали. Посматрајмо неко пресликавање $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.

Њега можемо да поистоветимо са *бесконачним* бинарним низом – тај низ има онолико чланова колико има природних бројева. Нека је $(\{0,1\}^*, \prec)$ потпуно бинарно дрво из примера одозго и f бесконачан бинарни низ. Тај низ одређује грану B_f нашег дрвета на следећи начин:

$$B_f = \{f \restriction n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Важи и обрнуто: свака грана B нашег дрвета одређује јединствени бесконачан бинарни низ. Приметимо још само да, иако је сваки ниво у потпуном бинарном дрвету коначан – на $n-$том нивоу имамо 2^n чворова – све скупа, нивоа тог дрвета има пребројиво много, колико и природних бројева. Пошто је пребројива унија коначних скупова пребројив скуп, можемо да закључимо да то дрво има $\aleph_0$ чворова. Међутим, грана у том дрвету има много више, $2^{\aleph_0}$ и толико има и реалних бројева или пак елемената скупа $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

На следећу теорему ћемо се вратити када будемо говорили о *Теореми компактности* (2.4) исказне логике.

Теорема (Кенигова лема). *Нека је $(T, \prec)$ бесконачно, коначно гранајуће дрво. Онда постоји бесконачна грана B у T.*

Доказ. Претпоставимо да је $(T, \prec)$ бесконачно, коначно гранајуће дрво. Дефинисаћемо низ елемената $t_n \in T$ индуктивно тако да ће следећи услови да буду задовољени:

(1) $t_n \in L_T(n)$, за свако $n \in \mathbb{N}$;
(2) ако је $m < n$, онда је $t_m \prec t_n$;
(3) скуп $\{s \in T \mid t_n \prec s\}$ је бесконачан.

Прво, нека је $t_0 \in L_T(0)$ корен нашег дрвета. Јасно је да су у овом случају услови одозго задовољени. Претпоставимо сада да смо дефинисали чвор t_n. Онда је скуп $\hat{t}_n$ коначан; рецимо да је $\hat{t}_n = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Ако је $t_n \prec s$ и имамо да је $h_T(s) > n+1$, онда постоји $1 \leq i \leq k$ такво да је $a_i \prec s$. Међутим, у том случају можемо да закључимо да постоји $1 \leq i \leq k$ такво да a_i задовољава услов (3) одозго. Узећемо онда да је $t_{n+1} = a_i$. Једноставно је видети да је $B = \{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ бесконачна грана у T. $\dashv$

Исказна логика

1. Језик исказне логике

У овом одељку ћемо да започнемо са разматрањима која се тичу синтаксе исказне логике. Видећемо како изгледа њен језик и како се на том језику граде речи које ће надаље посебно да нас занимају. Те речи ћемо звати исказним формулама. У наредном одељку ћемо видети како тим речима можемо да припишемо значење, док ћемо се у последњем одељку овог поглавља вратити синтактичким разматрањима да бисмо испитали у каквом су тачно односу синтакса и семантика нашег језика.

Појам формуле. Циљ читавог овог поглавља је да да̂ пример једног једноставног *формалног система*. Реч је о формалном систему за класичну исказну логику. Да бисмо тај формални систем изложили, прво морамо да фиксирамо *формални језик* исказне логике који ћемо да означавамо са $\mathscr{L}$.

Алфабет језика $\mathscr{L}$, скуп симбола од којих ћемо да у том језику градимо речи, састоји се из три дела. Прво, имамо *исказна слова* (или *исказне променљиве*): $p_1, p_2, \ldots$. Узећемо да исказних слова има колико и природних бројева, пребројиво много, а касније ће бити прилике да говоримо и о случајевима где имамо непребројиво много исказних слова у нашем језику. Скуп исказних слова ћемо да означавамо са $\mathscr{P}$. Променљивима $q, r, \ldots$ метајезика, са или без индекаса, ћемо понекад да се служимо да бисмо реферирали на елементе тог скупа.

Осим исказних слова, имамо још и симболе за везнике и то: $\neg$ (негација) и $\to$ (импликација). Везник импликације је један *бинарни* везник, он од два исказа прави нови исказ. Везник негације је *унарни* везник.

Поред исказних слова и везника у нашем алфабету имамо и помоћне симболе, леву (и десну) заграду. Претпостављамо, као што је обичај, да су сви ови скупови – скуп $\mathscr{P}$, скуп симбола за везнике и скуп помоћних симбола – међусобно дисјунктни.

Како смо већ споменули у Уводу, реч или израз нашег језика је произвољан, коначан низ симбола нашег алфабета, могуће празан. Један те исти симбол може више пута да се јави унутар неке речи. Број јављања симбола унутар неке речи зовемо њеном дужином.

Нас неће занимати све речи на нашем алфабету, него ћемо желети да из скупа свих речи издвојимо само оне које ће да буду на посебан начин изграђене. Такве ћемо речи звати исказним формулама. То ће бити смислене речи нашег језика. *Скуп исказних формула* $\mathcal{F}$ дефинишемо рекурзивно на следећи начин:

Дефиниција 1.1.

(1) $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$;
(2) $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{(\neg\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(\varphi \to \psi) \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\}$;
(3) $\mathcal{F} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$.

Као што малопре рекосмо, елементе скупа $\mathcal{F}$ зваћемо *исказним формулама* или краће *формулама*. Формуле које су елементи скупа $\mathcal{F}_0$ зваћемо *атомским формулама*. Формуле ћемо у наставку, баш као и горе, да означавамо схематским словима $\varphi, \psi, \sigma, \ldots$ са или без индекаса.

Ако је $\varphi \in \mathcal{F}_n$, али $\varphi \notin \mathcal{F}_{n-1}$, кажемо да је φ формула чији је *ранг* број n. Ранг формуле је мера сложености формуле која ће нам у доказима индукцијом често бити кориснија него проста дужина формула као низова симбола. Приметимо да је ранг атомских формула једнак 0, ранг формуле облика $(\neg\varphi)$ за један је већи од ранга формуле φ, док је ранг од $(\varphi \to \psi)$ за један већи од максимума рангова формула φ и ψ.

Пример 1.1. p_9, p_{17}, $((p_9 \to p_1) \to (\neg(p_2 \to (\neg p_3))))$ су неке од формула језика $\mathcal{L}$ исказне логике. Ранг последње од ових формула је 4.

Лема 1.1. *$\mathcal{F}$ је најмањи скуп речи који садржи $\mathcal{F}_0$ и који је затворен за везнике $\neg$ и $\to$. Другим речима,*

(*i*) *$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$;*
(*ii*) *ако $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, онда и $(\neg\varphi), (\varphi \to \psi) \in \mathcal{F}$;*
(*iii*) *ако је Γ ма који скуп речи који има претходна два својства, онда $\mathcal{F} \subseteq \Gamma$.*

Доказ. Јасно је да $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$. Ако $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, онда постоје m и n такви да $\varphi \in \mathcal{F}_m$ и $\psi \in \mathcal{F}_n$ па за $k = \max(m, n)$ имамо да $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_k$. Онда ћемо имати да $(\neg\varphi)$, као и све формуле облика $(\varphi \to \psi)$, припадају скупу $\mathcal{F}_{k+1} \subseteq \mathcal{F}$.

На крају, ако је Γ скуп за који важи (i) и (ii), онда индукцијом по n једноставно може да се покаже да, за свако n, $\mathcal{F}_n \subseteq \Gamma$, одакле следи да $\mathcal{F} \subseteq \Gamma$. На основу (i) знамо да $\mathcal{F}_0 \subseteq \Gamma$. Претпоставимо да за неко $n > 0$ важи $\mathcal{F}_n \subseteq \Gamma$. Пошто је $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{(\neg\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(\varphi \to \psi) \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\}$, на основу (ii) следи да $\mathcal{F}_{n+1} \subseteq \Gamma$, па је $\mathcal{F} \subseteq \Gamma$. $\dashv$

Део (iii) из претходне леме нам омогућава да на једноставан начин доказујемо тврђења о формулама нашег језика:

Последица 1.0.1. *За свако својство $\mathcal{S}$ речи језика $\mathcal{L}$, ако*

(i) *(база индукције) свака атомска формула има својство $\mathcal{S}$;*

(ii) *(индуктивни корак) за произвољне формуле φ и ψ, ако φ и ψ имају својство $\mathcal{S}$, онда и формуле $(\neg\varphi)$ и $(\varphi \to \psi)$ имају својство $\mathcal{S}$;*

онда све формуле језика $\mathcal{L}$ имају својство $\mathcal{S}$.

Доказ. Нека је Γ скуп свих речи које имају својство $\mathcal{S}$. Пошто хипотезе (i) и (ii) тачно одговарају деловима (i) и (ii) из Леме 1.1, можемо да закључимо да $\mathcal{F} \subseteq \Gamma$, што је и требало да покажемо. $\dashv$

Последњим тврђењем, као и неким његовим варијацијама, ћемо често да се служимо у наставку. Приметимо само да је то уопштење доказа уобичајеном математичком индукцијом: атомске формуле играју овде улогу броја 0, док пресликавања $\varphi \mapsto (\neg\varphi)$ и $\varphi, \psi \mapsto (\varphi \to \psi)$ одговарају операцији следбеника. Тако се хипотеза од (ii), да обе формуле φ и ψ имају својство $\mathcal{S}$, у овом контексту обично назива индуктивном хипотезом. Доказе који на овом тврђењу почивају зваћемо доказима *индукцијом по сложености формула.*

Јединствена читљивост. Дефиниција формула коју смо горе дали (Дефиниција 1.1) није једина. Оно што је важно јесте да нам она обезбеђује *јединствену читљивост.* То значи да, ако је φ формула, онда она на јединствен начин може да се прочита, или запише, као: (1) исказно слово или (2) формула облика $(\neg\psi)$, где је ψ јединствено одређено формулом φ, или пак као (3) $(\psi \to \sigma)$, где су ψ и σ јединствено одређени формулом φ. Примера ради, формула

$$(p_7 \to ((p_9 \to p_3) \to ((\neg p_3) \to p_9)))$$

на јединствен начин може да се запише као формула $(\varphi \to \psi) \in \mathcal{F}_4$, где је $\varphi = p_7 \in \mathcal{F}_0$ и $\psi = ((p_9 \to p_3) \to (\neg(p_3) \to p_9)) \in \mathcal{F}_3$, и ниједан други запис није конзистентан са дефиницијом формула коју смо горе дали. Да бисмо видели да то важи за све формуле, прво ћемо да докажемо следећу једноставну лему која нам уједно пружа још једну илустрацију доказа индукцијом по сложености формула.

Лема 1.2. *За сваку реч α језика $\mathscr{L}$, нека је $l(\alpha)$ број јављања левих заграда у α а $r(\alpha)$ број јављања десних заграда у α.*

(1) За сваку формулу φ важи $l(\varphi) = r(\varphi)$.

(2) За сваку формулу φ и сваки непразан прави иницијални сегмент φ' од φ важи $l(\varphi') > r(\varphi')$.

Доказ. Оба дела ове леме ћемо доказати истовремено, индукцијом по сложености формуле φ.

Ако је $\varphi = p_i$ исказно слово, онда (1) следи пошто је $l(p_i) = 0 = r(p_i)$. Са друге стране, (2) такође следи пошто у овом случају нема непразних правих иницијалних сегмената од φ.

Ако је $\varphi = (\neg\psi)$, за неку формулу ψ, онда на основу индуктивне хипотезе имамо да лема важи за ψ. Из тога следи да је

$$l(\varphi) = 1 + l(\psi) = 1 + r(\psi) = r(\varphi).$$

Дакле, (1) у овом случају важи за φ. Да бисмо показали да и (2) такође важи, узмимо неки непразан прави иницијални сегмент φ' од φ. Ако је $\varphi' = ($, онда је $l(\varphi') = 1 > 0 = r(\varphi')$. Ако је $\varphi' = (\neg$ опет имамо да важи то исто. Ако је $\varphi' = (\neg\psi'$, где је ψ' непразан прави иницијални сегмент од ψ, онда на основу индуктивне хипотезе важи $l(\psi') > r(\psi')$. Из тога следи да је:

$$l(\varphi') = 1 + l(\psi') > 1 + r(\psi') > r(\psi') = r(\varphi').$$

Ако је $\varphi' = (\neg\psi$, онда имамо да важи:

$$l(\varphi') = 1 + l(\psi) = 1 + r(\psi) > r(\psi) = r(\varphi').$$

Ако је $\varphi = (\psi \to \sigma)$, за неке формуле ψ и σ, поново можемо на основу индуктивне хипотезе да претпоставимо да лема важи за ове две формуле. За (1) имамо да је

$$l(\varphi) = 1 + l(\psi) + l(\sigma) = 1 + r(\psi) + r(\sigma) = r(\varphi).$$

За (2) поново разматрамо случајеве непразних правих иницијалних сегмената φ' формуле φ. У сваком од њих имаћемо да је $l(\varphi') > r(\varphi')$. ⊣

Служећи се овом лемом сада можемо да докажемо *Теорему о јединственој читљивости* формула исказне логике.

Теорема 1.1 (Теорема о јединственој читљивости). *За сваку формулу φ, постоји јединствен начин да се она прочита као:*

(1) $\varphi = p_i$, за неко исказно слово $p_i \in \mathcal{P}$, или
(2) $\varphi = (\neg\psi)$, за неку формулу ψ, или
(3) $\varphi = (\psi \to \sigma)$, за неке формуле ψ и σ.

Доказ. Знамо већ да свака формула нашег језика може да се прочита на један од ових начина. То следи из дефиниције појма исказне формуле. Оно што треба да покажемо јесте јединственост.

Ако је $\varphi = p_i$, онда формула φ не може да се прочита као неки од случајева (2) или (3), јер у оба та случаја имамо низове који започињу симболом леве заграде. Такође, исказно слово p_i је јединствено одређено формулом φ, па она не може да се прочита ни као неко p_j, за $i \neq j$.

Претпоставимо даље да је $\varphi = (\neg\psi)$. Треба да покажемо да формула φ не може да се прочита као неки од случајева (1) или (3). Такође, треба да покажемо да ако је $\varphi = (\neg\psi')$, онда морамо имати да је $\psi = \psi'$. Већ смо видели да φ не може да буде прочитана као случај (1). Претпоставимо да је $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, где су φ_1 и φ_2 формуле. Имамо, дакле, да је

$$(\neg\psi) = (\varphi_1 \to \varphi_2).$$

Ако са обе стране знака једнакости уклонимо први симбол добијамо да су следеће речи једнаке:

$$\neg\psi) = \varphi_1 \to \varphi_2).$$

Дакле, формула φ_1 започиње симболом $\neg$. Међутим, лако је индукцијом показати да ниједна формула не започиње симболом $\neg$.

Претпоставимо сада да је $\varphi = (\neg\psi')$. Имамо дакле да је $(\neg\psi) = (\neg\psi')$. Ако уклонимо први и последњи симбол са обе стране знака једнакости, и после тога још и симбол $\neg$, добићемо да је $\psi = \psi'$.

Претпоставимо на крају да је $\varphi = (\psi \to \sigma)$. Већ смо показали да φ не може да се прочита као неки од случајева (1) или (2). Претпоставимо онда да имамо

$$(\psi \to \sigma) = (\psi' \to \sigma').$$

Ако поново уклонимо први и последњи симбол са обе стране знака једнакости добићемо:

$$\psi \to \sigma = \psi' \to \sigma'.$$

Приметимо сада да је ψ најкраћи непразан иницијални сегмент са леве стране знака једнакости који има једнак број левих и десних заграда. То следи на основу претходне леме. Међутим, најкраћи непразан иницијални сегмент са десне стране знака једнакости за који исто то важи је ψ'. Дакле, $\psi = \psi'$. Ако сада са обе стране знака једнакости у $\psi \to \sigma = \psi' \to \sigma'$ уклонимо реч $\psi \to$, добићемо да је $\sigma = \sigma'$. $\dashv$

Рекурзивне дефиниције. На основу претходне теореме, када доказујемо неко тврђење о скупу формула $\mathcal{F}$, знамо да смо увек у једном од три случаја (1)–(3) горе, при чему су формуле ψ и σ јединствено одређене формулом φ. То нам је значајно зато што даје оправдање следећег принципа *рекурзивних дефиниција*. Нека је X скуп и нека су дате функције:

$$F : \mathcal{P} \to X$$
$$F_\neg : X \to X$$
$$F_\to : X^2 \to X.$$

Онда постоји јединствена функција $G : \mathcal{F} \to X$ таква да важи:

$$\begin{aligned} G(p_i) &= F(p_i), \text{ за свако } i \in \mathbb{N} \\ G((\neg\varphi)) &= F_\neg(G(\varphi)) \\ G((\varphi \to \psi)) &= F_\to(G(\varphi), G(\psi)). \end{aligned}$$

Без јединствене читљивости коју смо доказали за наше исказне формуле, постојање и јединственост такве функције G би били доведени у питање. Када би постојала два различита начина да се формула прочита, онда би одговарајуће композиције функција F могле да дају различите вредности функције G за једну те исту формулу. Међутим, на основу Теореме 1.1 функција G је добро дефинисана и јединствена (један посебан случај овог тврђења ћемо, илустрације ради, да докажемо у следећем одељку; в. Теорему 2.1).

Пример 1.2. Нека је

$$\begin{aligned} G_l(p_i) &= 1, \text{ за свако } i \in \mathbb{N} \\ G_l((\neg\varphi)) &= G_l(\varphi) + 3 \\ G_l((\varphi \to \psi)) &= G_l(\varphi) + G_l(\psi) + 3. \end{aligned}$$

Онда имамо да је $G_l(\varphi) =$ дужина формуле φ. Такође, ако је

$$\begin{aligned} G_v(p_i) &= 0, \text{ за свако } i \in \mathbb{N} \\ G_v((\neg\varphi)) &= G_v(\varphi) + 1 \\ G_v((\varphi \to \psi)) &= G_v(\varphi) + G_v(\psi) + 1, \end{aligned}$$

онда ћемо имати да је $G_v(\varphi) =$ број везника у формули φ. Ако сада узмемо да је p исказно слово и σ формула, онда можемо да дефинишемо $G_s(\varphi) = \varphi^p_\sigma$ за сваку формулу φ на следећи начин:

$$\begin{aligned} G_s(p) &= \sigma \\ G_s(q) &= q, \text{ ако је } p \neq q \\ G_s((\neg\varphi)) &= (\neg G_s(\varphi)) \\ G_s((\varphi \to \psi)) &= (G_s(\varphi) \to G_s(\psi)). \end{aligned}$$

У овом случају је формула φ^p_σ настала као резултат *супституције* формуле σ место сваког јављања исказног слова p у формули φ. Примера ради, ако је

$$\varphi = (p_7 \to ((p_9 \to p_3) \to ((\neg p_3) \to p_9)))$$

и $\sigma = (p_1 \to p_2)$, онда је

$$\varphi^{p_7}_\sigma = ((p_1 \to p_2) \to ((p_9 \to p_3) \to ((\neg p_3) \to p_9))).$$

Напомена. Уз нашу дефиницију формула заграде су нам неопходне да бисмо имали јединствену читљивост. Међутим, нису све заграде унутар формула такве. У наставку нећемо писати спољашње заграде у формулама. Такође, претпостављаћемо да негација везује јаче од осталих везника и нећемо писати заграде ни око негација. Укратко, штедећемо на заградама увек када неће бити недоумица око тога на које формуле тачно мислимо. Важно је напоменути да такви изрази неће бити формуле, иако ћемо на њих тако да реферирамо, већ скраћенице из којих изворне формуле можемо лако да реконструишемо. Њихова улога је да нам олакшају читање.

Ако бисмо желели да се у потпуности ослободимо заграда, то бисмо могли да учинимо са нешто друкчијом дефиницијом појма исказне формуле. Ако бисмо у Дефиницији 1.1 други њен део заменили са

$$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in \mathcal{F}_n\} \cup \{\to \varphi\psi \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\},$$

онда бисмо и за тако дефинисан појам исказне формуле могли да докажемо *Теорему о јединственој читљивости*. За формуле које се записују овако, где сваки везник независно од његове арности пишемо префиксно, кажемо да су записане у *пољској нотацији*. Још један начин да заграде избегнемо био би да се послужимо *обрнутом пољском нотацијом*. У том случају, други део Дефиниције 1.1 изгледао би овако:

$$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\varphi\neg \mid \varphi \in \mathcal{F}_n\} \cup \{\varphi\psi \to\mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\}.$$

Пример 1.3. Формулу $(p_9 \to p_1) \to \neg(p_2 \to \neg p_3)$ бисмо у пољској нотацији записивали овако:

$$\to\to p_9 p_1 \neg \to p_2 \neg p_3,$$

док бисмо је у обрнутој пољској нотацији записивали као

$$p_9 p_1 \to p_2 p_3 \neg \to \neg \to .$$

Приметите да ако посматрамо скраћено дрво ове формуле из Примера 1.5 доле, онда је сасвим једноставно видети како из сваке наше исказне формуле можемо лако да реконструишемо одговарајућу формулу у пољској или обрнутој пољској нотацији.

Осим везника нашег језика које смо горе узели као примитивне, често се као такви срећу још и бинарни везници $\wedge$ (конјункција), $\vee$ (дисјункција) и $\leftrightarrow$ (еквиваленција), као и *нуларни везници* или *исказне константе* $\top$ и $\bot$ (константа $\top$ стоји место произвољног исказа који је увек истинит и дуално томе за $\bot$). Ми ћемо, међутим, све те везнике да посматрамо као скраћенице:

$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\varphi \to \neg\psi)$
$\varphi \vee \psi$	$\neg\varphi \to \psi$
$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
$\top$	$\varphi \to \varphi$
$\bot$	$\neg\top$

Дакле, изразе из прве колоне разумемо тако да реферирају на одговарајуће изразе из друге колоне. Осим тога можемо да дефинишемо, рекурзијом по $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n = \begin{cases} \top & \text{ако је } n = 0, \\ \varphi_1 & \text{ако је } n = 1, \\ \varphi_1 \wedge \varphi_2 & \text{ако је } n = 2, \\ (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n & \text{ако је } n > 2. \end{cases}$$

Овакве *уопштене конјункције* ћемо понекад да означавамо и са $\bigwedge_{1 \le i \le n} \varphi_i$. Слично бисмо могли да дефинишемо и *уопштене дисјункције* (само бисмо место $\wedge$ писали $\vee$ а место $\top$ бисмо писали $\bot$ у дефиницији горе) које ћемо означавати и са $\bigvee_{1 \le i \le n} \varphi_i$.

Следећих неколико појмова треба да нам помогну да боље разумемо поступак рекурзивног грађења формула пошавши од исказних слова, применом корака (ii) из Леме 1.1 горе.

Дефиниција 1.2. *Градивни низ* је један коначан, непразан низ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ израза језика $\mathscr{L}$, такав да је сваки члан тог низа исказно слово, или је добијен из чланова који му у низу претходе на основу корака (ii) из Леме 1.1. *Градивни низ за* α је градивни низ чији је α последњи члан.

Није тешко видети да је φ формула ако и само ако постоји градивни низ за φ.

Пример 1.4. Један градивни низ треће формуле из Примера 1.1 горе је: p_9, p_1, $p_9 \to p_1$, p_2, p_3, $\neg p_3$, $p_2 \to \neg p_3$, $\neg(p_2 \to \neg p_3)$, $(p_9 \to p_1) \to \neg(p_2 \to \neg p_3)$.

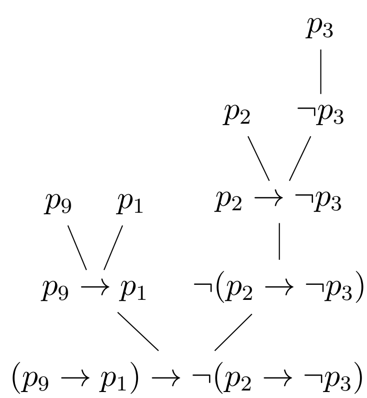
Дефиниција 1.3. Ако је φ формула, са $\mathcal{S}\mathit{ub}(\varphi)$ ћемо да означавамо *скуп потформула формуле* φ који дефинишемо рекурзивно (в. Пример 1.2) на следећи начин:

$\mathcal{S}\mathit{ub}(p_i) = \{p_i\}$, за свако $p_i \in \mathscr{P}$;
$\mathcal{S}\mathit{ub}(\neg\varphi) = \mathcal{S}\mathit{ub}(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$;
$\mathcal{S}\mathit{ub}(\psi \to \sigma) = \mathcal{S}\mathit{ub}(\psi) \cup \mathcal{S}\mathit{ub}(\sigma) \cup \{\psi \to \sigma\}$.

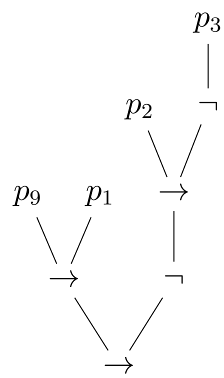
Ако је $\psi \in \mathcal{S}\mathit{ub}(\varphi)$, онда кажемо да је формула ψ *потформула* формуле φ. Ако је ψ потформула од φ и ψ је различито од φ, кажемо да је ψ *права потформула* од φ.

Још један начин на који можемо да представимо структуру наших формула јесте помоћу појма дрвета. Свакој формули φ можемо да придружимо једно дрво у чијем ће се корену налазити она сама, док ће се у преосталим чворовима, ако таквих има, налазити све праве потформуле формуле φ. Дрвета наших формула су коначна. Нешто касније ћемо видети да и бесконачна дрвета могу за логику да буду занимљива.

Пример 1.5. За формулу $(p_9 \to p_1) \to \neg(p_2 \to \neg p_3)$, имамо следеће дрво:



Или, још краће:



Дрвета формула нам илуструју како је формула изграђена пошавши од исказних слова, применом корака (ii) из Леме 1.1 горе. Из сваког дрвета формуле можемо лако да реконструишемо њен градивни низ тако што ћемо то дрво да линеаризујемо.

Задатак 1.1. *За сваку формулу φ дефинишите дрво формуле $T(\varphi)$ рекурзивно, по узору на дефиниције из Примера 1.2.*

2. Семантика исказне логике

У прошлом одељку говорили смо синтакси исказне логике. Решили смо се да из скупа свих речи на нашем алфабету издвојимо само смислене речи – исказне формуле. Сада ћемо да видимо како тим нашим смисленим речима можемо да припишемо значење. Видећемо шта су то логичке истине исказне логике и објаснићемо важан појам семантичке последице. На крају, биће речи о једном од најважнијих резултата који се тиче семантике исказне логике – *Теореми компактности* (2.4) – а после тога ћемо да наведемо неке њене занимљиве последице.

Валуације и истиносне функције. *Класична логика*, којом ћемо ми једино овде да се бавимо разликује две *истиносне вредности* – каже се још да је она двовредносна. Те две истиносне вредности ћемо да означавамо са 1 (истина) и 0 (лаж). Функције $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ћемо звати *истиносним функцијама*. Различитих $n-$арних истиносних функција има 2^{2^n}, што је лако видети пошто има 2^n $n-$торки нула и јединица. Скуп свих $n-$арних истиносних функција ћемо да означавамо са B_n. Скуп B_2 има $2^4 = 16$ елемената, док скупови B_1 и B_0 имају, редом, четири и два елемента. Чланови овог последњег скупа су две нуларне истиносне функције, 0 и 1, и то су елементи скупа $\{0,1\}$.

Важан принцип на коме класична логика почива зове се *принцип истиносне функционалности*. Грубо говорећи, овај принцип каже да истиносна вредност неког сложеног исказа зависи од истиносне вредности делова од којих је он изграђен, и ни од чега другог не зависи.

Сви везници нашег језика су *истиносно-функцијски*, као и они које смо помоћу њих дефинисали. Истиносне функције, операције које иза њих стоје су, редом, $f_\neg$, $f_\wedge$, $f_\vee$, $f_\to$ и $f_\leftrightarrow$. Прва од ових операција, која одговара везнику негације, је унарна а остале су операције бинарне. Све заједно, те су операције задате следећом таблицом:

x_1	x_2	$f_\neg(x_1)$	$f_\wedge(x_1,x_2)$	$f_\vee(x_1,x_2)$	$f_\to(x_1,x_2)$	$f_\leftrightarrow(x_1,x_2)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Сада ћемо да дефинишемо појам валуације. Интуитивно говорећи, валуације је најбоље разумети као мост између синтаксе и семантике нашег језика. Да бисмо нашим формулама приписали значење, да бисмо их интерпретирали, полазимо од најпростијих таквих.

Дефиниција 2.1. *Основна валуација* v_b *је свака функција облика*

$$v_b : \mathscr{P} \to \{0,1\}.$$

Приметимо да основних валуација има $2^{\aleph_0}$, колико и реалних бројева. Циљ нам је да, полазећи од једне основне валуације v_b, свакој формули φ језика $\mathscr{L}$ припишемо истиносну вредност $v(\varphi)$ из скупа $\{0,1\}$.

Дефиниција 2.2. Нека је $v_b : \mathscr{P} \to \{0,1\}$ основна валуација. Функцију $v : \mathscr{F} \to \{0,1\}$ дефинишемо рекурзивно на следећи начин:

(1) $v(p_i) = v_b(p_i)$, за свако $p_i \in \mathscr{P}$;
(2) $v(\neg\varphi) = f_\neg(v(\varphi))$;
(3) $v(\varphi \to \psi) = f_\to(v(\varphi), v(\psi))$.

Функције v ћемо да зовемо просто *валуацијама*.

Приметимо само да свака основна валуација $v_b : \mathscr{P} \to \{0,1\}$ може на *јединствен* начин да се прошири до валуације $v : \mathscr{F} \to \{0,1\}$ која задовољава услове (1)-(3) горе. То следи на основу онога што смо рекли у одељку о рекурзивним дефиницијама (в. пасус пре Примера 1.2). Међутим, да бисмо идеје из тог одељка боље илустровали, овде ћемо да дамо и директан доказ тврђења које смо управо споменули.

Теорема 2.1. *Свака валуација* v_b *може на јединствен начин да се прошири до валуације* v.

Доказ. Фиксирајмо једну основну валуацију $v_b = v_0 : \mathscr{P} \to \{0,1\}$. Треба рекурзивно да дефинишемо низ функција $v_n : \mathscr{F}_n \to \{0,1\}$, за $n \in \mathbb{N}$, такав да за свако n, v_{n+1} шири v_n и приде за v_{n+1} важе услови (1)-(3) горе. За дато v_n узећемо услове (1)-(3) одозго да бисмо дефинисали вредности функције v_{n+1} на елементима скупа $\mathscr{F}_{n+1} \setminus \mathscr{F}_n$. Ако су $\varphi, \psi \in \mathscr{F}_n$, онда узимамо да је:

$$v_{n+1}(\varphi \to \psi) = \begin{cases} 1 & \text{ако је } v_n(\varphi) = 0 \text{ или } v_n(\psi) = 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Слично чинимо и за везник негације. Приметимо да се овде ослањамо на јединствену читљивост да бисмо били сигурни да се тачно један од ових услова може да примени на сваки елемент скупа $\mathscr{F}_{n+1} \setminus \mathscr{F}_n$.

Сада можемо да дефинишемо функцију $v : \mathscr{F} \to \{0,1\}$ овако:

$$v(\sigma) = v_n(\sigma),$$

за неко n такво да $\sigma \in \mathscr{F}_n$. Јасно је да функција v шири v_0 и задовољава услове (1)-(3) горе, јер то важи за сваку функцију v_n.

Да бисмо доказали јединственост овог проширења, претпоставимо да су v и w две валуације које шире v_0. Индукцијом по сложености формула ћемо да покажемо да за сваку формулу φ важи:

$$v(\varphi) = w(\varphi).$$

Ако је φ исказно слово p_i, онда је $v(p_i) = v_0(p_i) = w(p_i)$. Претпоставимо сада да су φ и ψ формуле, такве да важи $v(\varphi) = w(\varphi)$ и $v(\psi) = w(\psi)$. Онда, да узмемо само један од случајева, важи следеће:

$$\begin{aligned} v(\varphi \to \psi) = 1 &\Leftrightarrow v(\varphi) = 0 \text{ или } v(\psi) = 1 \\ &\Leftrightarrow w(\varphi) = 0 \text{ или } w(\psi) = 1 \\ &\Leftrightarrow w(\varphi \to \psi) = 1, \end{aligned}$$

а поред тога важи и

$$\begin{aligned} v(\varphi \to \psi) = 0 &\Leftrightarrow v(\varphi \to \psi) \neq 1 \\ &\Leftrightarrow w(\varphi \to \psi) \neq 1 \\ &\Leftrightarrow w(\varphi \to \psi) = 0. \end{aligned}$$

Пошто су ово једине две вредности ове функције, у сваком случају имамо да је $v(\varphi \to \psi) = w(\varphi \to \psi)$. Доказ случаја где је φ облика негације аналоган је овом. $\dashv$

За формулу φ, нека је $\varphi_{\mathscr{P}}$ скуп свих исказних слова која се јављају у φ. Важно је да приметимо да $v(\varphi)$ зависи само од истиносних вредности које v приписује словима из $\varphi_{\mathscr{P}}$. Другим речима, ако је $\varphi_{\mathscr{P}} = \{q_1, \dots, q_n\}$, а v и w су валуације такве да је $v(q_i) = w(q_i)$, за свако $i = 1, \dots, n$, онда ћемо имати да је $v(\varphi) = w(\varphi)$.

Тврђење с краја претходног пасуса је једноставно показати индукцијом по сложености формуле φ. У случају када је φ атомско, тврђење ће тривијално да важи. Претпоставимо да је формула φ облика $\neg\psi$ и да за свако $q_i \in \varphi_{\mathscr{P}}$ имамо $v(q_i) = w(q_i)$. Међутим, пошто је $\varphi_{\mathscr{P}} = \psi_{\mathscr{P}}$, на основу индуктивне хипотезе следи да је $v(\psi) = w(\psi)$. Дакле

$$v(\varphi) = f_{\neg}(v(\psi)) = f_{\neg}(w(\psi)) = w(\varphi).$$

Случај када је формула φ облика импликације бисмо доказали слично томе.

Напомена. Није тешко видети да ће за наше дефинисане везнике важити следеће:

(4) $v(\varphi \wedge \psi) = f_{\wedge}(v(\varphi), v(\psi))$;
(5) $v(\varphi \vee \psi) = f_{\vee}(v(\varphi), v(\psi))$;
(6) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = f_{\leftrightarrow}(v(\varphi), v(\psi))$;
(7) $v(\top) = 1$;
(8) $v(\bot) = 0$.

Таутологије и појам семантичке последице. Служећи се појмом валуације, прво ћемо да дефинишемо семантички појам задовољивости.

Дефиниција 2.3. Нека је φ произвољна формула и v валуација. Ако важи $v(\varphi) = 1$, кажемо да *v задовољава φ*. Такође, ако је Γ скуп формула, кажемо да *v задовољава* Γ, ако је $v(\varphi) = 1$, за свако $\varphi \in \Gamma$. Кажемо да је формула просто *задовољива* ако постоји валуација која је задовољава. Скуп формула Γ је *задовољив* ако постоји валуација која задовољава Γ. За скуп формула Γ кажемо да је *коначно задовољив* ако је сваки коначан $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ задовољив.

Следећа дефиниција нам каже шта су то логичке истине исказне логике.

Дефиниција 2.4. Формула φ је *таутологија*, ако је $v(\varphi) = 1$, за сваку валуацију $v : \mathscr{F} \to \{0, 1\}$.

Пример 2.1. Следеће су формуле таутологије:

$$p_1 \vee \neg p_1$$
$$((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_1$$
$$p_1 \leftrightarrow \neg\neg p_1.$$

Питање да ли је нека формула таутологија је *одлучиво*. Постоји ефективна процедура која нам после коначно много корака даје одговор „да” ако је формула таутологија, или „не” ако она то није.

Да бисмо, примера ради, проверили да је друга формула из претходног примера заиста таутологија, служимо се *истиносним таблицама*:

p_1	p_2	$p_1 \to p_2$	$(p_1 \to p_2) \to p_1$	$((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_1$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Сваки ред у оваквим таблицама стоји место једног скупа валуација које се све слажу за вредности које приписују исказним словима која се у овој формули јављају (в. напомену с краја претходне стране). Ако је φ формула и $|\varphi_{\mathcal{P}}| = n$, за $n \geq 1$, онда ће истиносна таблица од φ да има 2^n таквих редова.

Дефиниција 2.5. Нека је $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ и $\varphi \in \mathcal{F}$. Кажемо да је φ *семантичка последица* скупа формула Γ, што записујемо као $\Gamma \models \varphi$, ако за сваку валуацију v такву да је $v(\psi) = 1$, за свако $\psi \in \Gamma$, важи да је $v(\varphi) = 1$. Другим речима, $\Gamma \models \varphi$ ако свака валуација која задовољава Γ у исто време задовољава и φ. За формуле φ и ψ кажемо да су *логички еквивалентне* ако је свака од њих семантичка последица оне друге. То ћемо записивати као $\varphi \sim \psi$.

Следећа једноставна тврђења ове појмове доводе у везу са појмовима таутологичности и задовољивости.

(1) *Формула φ је таутологија ако и само ако је $\emptyset \models \varphi$.*
(2) *Формула ψ је семантичка последица од $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ако и само ако је формула $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ таутологија.*
(3) *Формуле φ и ψ су логички еквивалентне ако и само ако је формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ таутологија.*
(4) *Формула φ је таутологија ако и само ако формула $\neg\varphi$ није задовољива.*
(5) *Формула φ је задовољива ако и само ако формула $\neg\varphi$ није таутологија.*

Задатак 2.1. *Докажите тврђења која смо управо навели.*

На основу (1) одозго, од сада ћемо писати $\models \varphi$ (место $\emptyset \models \varphi$) када будемо желели да кажемо да је формула φ таутологија.

Списак логички еквивалентних формула из Табеле 1 горе ће нам користити у наставку. Одозго на доле, то су *закони идемпотенције*, *комутативности*, *асоцијативности*, *дистрибутивности*, *апсорпције* и *Де Морганови закони*.

Функционална потпуност. Сада ћемо да покажемо да је скуп наших примитивних везника $\{\neg, \rightarrow\}$ *функционално потпун*. То значи да ћемо помоћу њих сваки истиносно-функцијски везник моћи да дефинишемо.

Прво, за сваку формулу φ ћемо да пишемо $\varphi(q_1, \ldots, q_n)$ када будемо желели да истакнемо да се у њој јављају само исказна слова $q_1, \ldots, q_n$. То не значи да сва та исказна слова морају да се јављају у φ, него само да у φ нема других исказних слова осим оних из $\{q_1, \ldots, q_n\}$. Другим речима, важи $\varphi_{\mathcal{P}} \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$.

$\varphi \land \varphi \sim \varphi$	$\varphi \lor \varphi \sim \varphi$
$\varphi \land \psi \sim \psi \land \varphi$	$\varphi \lor \psi \sim \psi \lor \varphi$
$\varphi \land (\psi \land \sigma) \sim (\varphi \land \psi) \land \sigma$	$\varphi \lor (\psi \lor \sigma) \sim (\varphi \lor \psi) \lor \sigma$
$\varphi \land (\psi \lor \sigma) \sim (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \sigma)$	$\varphi \lor (\psi \land \sigma) \sim (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \sigma)$
$\varphi \land (\varphi \lor \psi) \sim \varphi$	$\varphi \lor (\varphi \land \psi) \sim \varphi$
$\neg(\varphi \land \psi) \sim \neg\varphi \lor \neg\psi$	$\neg(\varphi \lor \psi) \sim \neg\varphi \land \neg\psi$
$\varphi \land \neg\varphi \sim \bot$	$\varphi \lor \neg\varphi \sim \top$

Табела 1. Логички еквивалентне формуле

Дефиниција 2.6. За сваку формулу $\varphi(q_1, \ldots, q_n)$ дефинишемо $n-$арну истиносну функцију $f_\varphi^n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ на следећи начин:

$$f_\varphi^n(x_1, \ldots, x_n) = v(\varphi),$$

где је валуација v таква да важи $v(q_i) = x_i$, за свако $i = 1, \ldots, n$. Другим речима, f_φ^n је истиносна функција која одговара истиносној таблици формуле φ.

Пример 2.2.

- За сваки бинарни везник $\star$, ако је $\varphi = q_1 \star q_2$, онда је f_φ истиносна функција $f_\star$ која одговара везнику $\star$. Такође, ако је $\varphi = \neg q_1$, онда је $f_\varphi = f_\neg$.
- Ако је $\varphi = (q_1 \land q_2) \lor (\neg q_1 \land q_3)$, онда је f_φ истиносна функција која одговара тернарном везнику *ако..., онда..., иначе...*.

Да бисмо били сасвим прецизни, приметимо да свака формула φ одређује бесконачно много истиносних функција f_φ^n, по једну функцију за свако $n \geq n_\varphi$, где је n_φ најмањи природан број m такав да важи $\varphi_{\mathscr{P}} \subseteq \{q_1, \ldots, q_m\}$. Нешто сасвим слично имамо када посматрамо полином, рецимо $x \cdot y$, који дефинише функцију две промењиве, али исто тако и функцију три промењиве x, y и z чије вредности зависе само од аргумената x и y. У наставку ћемо, као и раније у овом примеру, да пишемо само f_φ када се n подразумева или нам није важно.

Приметимо да само на основу претходне дефиниције имамо да за произвољне исказне формуле φ и ψ важи:

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow f_\varphi = f_\psi.$$

Главно тврђење у вези са истиносним функцијама које ће нам требати је следеће:

Теорема 2.2. *За сваку истиносну функцију* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$*, за* $n \geq 1$*, постоји формула* $\varphi(q_1, \ldots, q_n)$ *у којој се од везника јављају само* $\neg, \wedge$ *и* $\vee$ *и која је таква да важи*

$$f = f_\varphi.$$

Доказ. Ако f увек узима вредност 0, нека је $\varphi = p_1 \wedge \neg p_1$. Иначе, за сваки ред $\mathfrak{r} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ у таблици функције f узмимо формулу

$$\varphi_\mathfrak{r} = \epsilon_1 q_1 \wedge \epsilon_2 q_2 \wedge \ldots \wedge \epsilon_n q_n$$

где је

$$\epsilon_i = \begin{cases} \text{ништа} & \text{за } x_i = 1, \\ \neg & \text{за } x_i = 0. \end{cases}$$

Примера ради, ред $\mathfrak{r} = (1,0,1)$ нам даје формулу $\varphi_\mathfrak{r} = q_1 \wedge \neg q_2 \wedge q_3$.

Приметимо да је $f_{\varphi_\mathfrak{r}}(x_1, \ldots, x_n) = 1$, али $f_{\varphi_\mathfrak{r}}(x'_1, \ldots, x'_n) = 0$ ако је $(x_1, \ldots, x_n) \neq (x'_1, \ldots, x'_n)$. Посматрајмо сада низ $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$, за $m \leq 2^n$, свих $\mathfrak{r} \in \{0,1\}^n$ таквих да је $f(\mathfrak{r}) = 1$ (знамо да постоји макар један такав). Узмимо да је

$$\varphi = \varphi_{\mathfrak{r}_1} \vee \varphi_{\mathfrak{r}_2} \vee \ldots \vee \varphi_{\mathfrak{r}_m}.$$

Онда ћемо имати да је $f_\varphi = 1$ ако и само ако је макар једно $f_{\varphi_{\mathfrak{r}_i}}(\mathfrak{r}) = 1$ ако и само ако $\mathfrak{r} \in \{\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m\}$ ако и само ако $f(\mathfrak{r}) = 1$. Дакле, $f_\varphi = f$. $\dashv$

Пример 2.3. Претпоставимо да је истиносна функција f задата следећом таблицом:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Онда ће одговарајућа формула (у смислу претходног тврђења) која од везника садржи само $\neg, \wedge$ и $\vee$ бити

$$\varphi = (q_1 \wedge q_2 \wedge q_3) \vee (q_1 \wedge \neg q_2 \wedge \neg q_3) \vee (\neg q_1 \wedge q_2 \wedge \neg q_3).$$

Формула φ из претходног примера је посебног облика. Она је једна дисјункција, чији је сваки дисјункт конјункција, чији је сваки конјункт исказно слово или негација исказног слова. За такве формуле се каже да се налазе у *дисјунктивној нормалној форми*. Дуално томе бисмо могли да кажемо да се формула налази у *конјунктивној нормалној форми*, ако је она једна конјункција, чији је сваки конјункт дисјункција, чији је сваки дисјункт исказно слово или негација исказног слова. Приметимо само да на основу напомене коју смо дали пре Дефиниције 1.2, конјункције, односно дисјункције могу да буду једночлане као и празне.

Везник дисјункције може једноставно да се дефинише помоћу конјункције и негације, као и везник конјункције помоћу везника дисјункције и негације. Такође, већ смо видели како конјункцију и дисјункцију можемо да дефинишемо помоћу импликације и негације. Као последицу претходног резултата имамо, дакле, следеће тврђење:

ПОСЛЕДИЦА 2.2.1. *Свака формула је еквивалентна формули у којој се од везника јављају само* $\neg, \wedge$, *само* $\neg, \vee$ *или пак само* $\neg, \rightarrow$. *Дакле, за сваку истиносну функцију постоје одговарајуће формуле у којима се од везника јављају само* $\neg, \wedge$, *само* $\neg, \vee$ *или пак само* $\neg, \rightarrow$.

Постова теорема. Резултат који смо управо доказали нам каже да је наш скуп примитивних везника $\{\neg, \rightarrow\}$ функционално потпун – сваки истиносно-функцијски везник можемо да дефинишемо служећи се везницима из тог скупа.

Са друге стране, скуп везника $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, примера ради, није функционално потпун. То није тешко да се види, јер за сваку формулу φ у којој се од везника јављају само поменути и за сваку валуацију v такву да је $v(q_i) = 1$, за свако исказно слово $q_i \in \varphi_{\mathscr{P}}$, имаћемо да важи $v(\varphi) = 1$. Дакле, ни за једну такву формулу φ нећемо имати да је $\neg q_1 \sim \varphi$.

Међутим, понекад скуп везника може да буде такав да није сасвим једноставно дати одговор на питање да ли је он функционално потпун или није. Било би нам зато корисно када бисмо могли да нађемо неки нужан и довољан услов функционалне потпуности скупа везника $\mathscr{C}$ који би нам помогао да на то питање лакше одговоримо.

Такав један тест функционалне потпуности скупа везника $\mathscr{C}$ ћемо да опишемо у наставку. Њега дугујемо америчком логичару Емилу Посту. Пре него што то урадимо, прво треба да дефинишемо пет скупова везника, који се зову још и *Постовим класама*.

Ниједан од тих скупова везника неће бити функционално потпун, али ће нам бити неопходни да бисмо формулисали Постов тест.

За сваку истиносну функцију $f \in B_n$ дефинишимо њен *дуал* f_d на следећи начин:

$$f^d(x_1, \dots, x_n) = f_\neg(f(f_\neg(x_1), \dots, f_\neg(x_n))).$$

Да бисмо излагање учинили читљивијим, злоупотребићемо нашу нотацију па ћемо место $f_\neg(x)$ писати $\neg x$, и слично ћемо да чинимо и са другим истиносним функцијама када нам то буде било корисно. Из контекста ће међутим увек да буде јасно да ли говоримо о везнику или истиносној функцији која иза њега стоји. У овој нотацији, дакле, имали бисмо да дефиниција дуала f^d функције f одозго изгледа овако:

$$f^d(x_1, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n),$$

што је читљивије. Приметимо само да је $(f^d)^d = f$, пошто је

$$(f^d)^d(x_1, \dots, x_n) = \neg\neg f(\neg\neg x_1, \dots, \neg\neg x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

За истиносну функцију f кажемо да је *само-дуална* ако важи $f = f^d$.

Приметимо само да је $f_\wedge^d = f_\vee$ као и $f_\vee^d = f_\wedge$. Такође, имамо да је $f_\leftrightarrow^d = f_+$, где је f_+ истиносна функција (сабирање по модулу 2) која стоји иза везника *искључујуће дисјункције*:

x_1	x_2	$f_+(x_1, x_2)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ниједна од претходно побројаних функција у овом пасусу није, дакле, само-дуална. Међутим, имамо да је $f_\neg^d = f_\neg$.

Сада ћемо да дефинишемо *монотоне* истиносне функције. То ће бити две нуларне истиносне функције из B_0, константе 0 и 1, и за $n \geq 1$ све функције $f \in B_n$ такве да за свако $i = 1, \dots, n$ важи:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Приметимо да су, поред константи из B_0 и истиносне функције $f_\wedge$ и $f_\vee$ монотоне.

За истиносну функцију $f \in B_n$ кажемо да је *линеарна*, ако је

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n,$$

за неке коефицијенте $c_0, \dots, c_n \in \{0, 1\}$. Овде је $+$ сабирање по модулу 2 одозго, док је множење - које нисмо посебно означавали - само истиносна функција $f_\wedge$.

Пошто је линеарна функција одређена вредностима коефицијената c_i, можемо да видимо да $n-$арних линеарних функција има колико и бинарних низова дужине $n+1$, укупно 2^{n+1}. Дакле, све функције из B_0 и B_1 су линеарне. Такође, истиносне функције $f_\leftrightarrow$ и f_+ су линеарне, примера ради.

За истиносну функцију $f \in B_n$ кажемо да је $0-$*константна* ако важи

$$f(0, \dots, 0) = 0.$$

Слично томе, за функцију $f \in B_n$ кажемо да је $1-$*константна* ако важи

$$f(1, \dots, 1) = 1.$$

За везник $\star$ ћемо рећи да је само-дуалан (монотон, линеаран, $0-$константан или $1-$константан), ако је истиносна функција $f_\star$ која му одговара само-дуална (монотона, линеарна, $0-$константна или $1-$константна). Слично ћемо да чинимо и у случају формула φ у зависности од тога која од побројаних својстава њима одговарајуће истиносне функције f_φ поседују.

Скуп свих само-дуалних везника ћемо да означавамо са **SD**, свих монотоних везника са **M**, свих линеарних везника са **L**, док ћемо са $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ да означавамо скупове свих $0-$константних и $1-$константних везника, тим редом. Ове скупове везника зовемо *Постовим класама*.

Тврђење 2.6.1. Нека је $\mathscr{C}$ скуп везника и φ формула. Онда важи:

(1) ако су сви везници из $\mathscr{C}$ само-дуални, онда је и свака формула φ у којој се јављају само везници из $\mathscr{C}$ само-дуална;
(2) ако су сви везници из $\mathscr{C}$ монотони, онда је и свака формула φ у којој се јављају само везници из $\mathscr{C}$ монотона;
(3) ако су сви везници из $\mathscr{C}$ линеарни, онда је и свака формула φ у којој се јављају само везници из $\mathscr{C}$ линеарна;
(4) ако су сви везници из $\mathscr{C}$ $0-$константни, онда је и свака формула φ у којој се јављају само везници из $\mathscr{C}$ $0-$константна;
(5) ако су сви везници из $\mathscr{C}$ $1-$константни, онда је и свака формула φ у којој се јављају само везници из $\mathscr{C}$ $1-$константна.

Доказ. Овде ћемо да дамо само скицу доказа тврђења (2). Остала се тврђења доказују слично овом. Да бисмо доказали (2), довољно ће бити да покажемо да ако је $f \in B_m$ истиносна функција која може да се добије композицијом монотоних истиносних функција, онда је и f монотона.

Претпоставимо онда да је $f \in B_m$ једна таква функција. Тада постоје функције $g \in B_n$ и $g_1, \ldots, g_n \in B_m$ које су монотоне и такве да важи:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = g(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

Нека су $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_m)$ две $m-$торке из $\{0,1\}^m$ такве да је $x_i \leq y_i$, за свако $i = 1, \ldots, m$. Онда ћемо, за свако $i = 1, \ldots, n$ имати да је

$$g_i(x_1, \ldots, x_m) \leq g_i(y_1, \ldots, y_m),$$

пошто су све ове функције по претпоставци монотоне. Такође

$$g(g_1(\vec{x}), \ldots, g_n(\vec{x})) \leq g(g_1(\vec{y}), \ldots, g_n(\vec{y}))$$

(где је $\vec{x} = x_1, \ldots, x_m$ и слично томе за $\vec{y}$) пошто смо претпоставили да је и функција g монотона. Дакле, имамо да важи

$$f(x_1, \ldots, x_m) \leq f(y_1, \ldots, y_m)$$

па је и функција f монотона. $\dashv$

Као последицу претходног тврђења имамо следеће.

Последица 2.2.2. *Нека је $\mathscr{C}$ скуп везника. Тада важи следеће:*

(1) ако $\mathscr{C} \subseteq \mathbf{SD}$, онда $\mathscr{C}$ није функционално потпун;
(2) ако $\mathscr{C} \subseteq \mathbf{M}$, онда $\mathscr{C}$ није функционално потпун;
(3) ако $\mathscr{C} \subseteq \mathbf{L}$, онда $\mathscr{C}$ није функционално потпун;
(4) ако $\mathscr{C} \subseteq \mathbf{P}_0$, онда $\mathscr{C}$ није функционално потпун;
(5) ако $\mathscr{C} \subseteq \mathbf{P}_1$, онда $\mathscr{C}$ није функционално потпун.

Доказ. Да бисмо показали да важи (1), присетимо се да смо горе напоменули да $\wedge$ као ни $\vee$ нису само-дуални. Дакле, на основу претходног тврђења, ти се везници не могу дефинисати помоћу везника из $\mathscr{C}$.

Да бисмо видели да важи (2), треба само да приметимо да $\neg$ није монотон везник. То је зато што је $f_\neg(0) = 1$, док је $f_\neg(1) = 0$. Дакле, негација не може да се дефинише помоћу везника који су сви монотони.

За тврђење (3), довољно је да знамо да $\wedge$ није линеарна. Код линеарних функција, ако је вредност коефицијента c_i једнака 1, онда ће промена вредности $i-$те промењиве увек да доведе до промене вредности функције. Међутим, приметимо само да имамо да $f_\wedge(1,1) \neq f_\wedge(1,0)$, али $f_\wedge(0,1) = f_\wedge(0,0)$. Дакле, конјункција не може да се дефинише помоћу везника који су сви линеарни.

Да бисмо видели да важе тврђења (4) и (5), довољно је да приметимо да везник еквиваленције није $0-$константан, док везник искључујуће дисјункције није $1-$константан. Дакле, та два везника неће моћи помоћу везника из скупова $\mathscr{C}$ из (4) и (5), тим редом, да се дефинишу. $\dashv$

Сада можемо да формулишемо Постов тест функционалне потпуности скупова везника.

Теорема 2.3 (Постова теорема). *Нека је $\mathscr{C}$ скуп везника. Онда је $\mathscr{C}$ функционално потпун ако и само ако $\mathscr{C}$ није подскуп од* $\mathbf{SD}$*, $\mathscr{C}$ није подскуп од* $\mathbf{M}$*, $\mathscr{C}$ није подскуп од* $\mathbf{L}$*, $\mathscr{C}$ није подскуп од* $\mathbf{P}_0$ *и $\mathscr{C}$ није подскуп од* $\mathbf{P}_1$.

Пре него што дамо доказ ове теореме, прво ћемо да наведемо једну њену еквивалентну формулацију која се служи појмом истиносне функције. То је зато што ће нам бити једноставније да тврђења која ће нам бити неопходна за доказ *Постове теореме* формулишемо и докажемо за те функције, али је све што ћемо рећи еквивалентно одговарајућим тврђењима која се тичу наших истиносно-функцијских везника.

Тако ћемо у наставку да кажемо да је скуп истиносних функција функционално потпун, када у ствари мислимо да скуп њима одговарајућих везника има то својство. Иако смо се и ми у овом одељку служили нотацијом која би могла да сугерише друкчије, не треба да се заборави да везници нису функције, они су део језика и та разлика не треба да се губи из вида.

Еквивалентна формулација *Постове теореме* коју смо горе споменули гласи:
Постова теорема (други облик). *Скуп истиносних функција F је функционално потпун ако и само ако постоје функције $f_1, \ldots, f_5 \in F$, такве да је*

$$f_1(0,\ldots,0) = 1 \qquad f_2(1,\ldots,1) = 0,$$

функција f_3 није само-дуална, f_4 није монотона а f_5 није линеарна.

Идеја доказа теореме, здесна на лево, је следећа (други је смер сасвим једноставно доказати на основу онога што смо рекли до сада). Прво ћемо да покажемо да служећи се функцијама f_1, f_2, f_3 и f_4 можемо да дефинишемо $f_\neg$ као и обе константне функције из B_1. После тога ћемо показати да, служећи се још и функцијом

f_5, можемо да дефинишемо функцију $f_\wedge$ која ће заједно са $f_\neg$ да чини један функционално потпун скуп истиносних функција.

Напомена. Пре него што дамо доказ *Постове теореме* једна је напомена на месту. Рекли смо да ће нам циљ бити да покажемо како служећи се неким истиносним функцијама, неке друге истиносне функције можемо да дефинишемо. Биће нам од користи ако за тренутак застанемо и погледамо чиме све у таквим дефиницијама можемо да се служимо. Нешто прецизније речено, ако имамо скуп истиносних функција $\mathscr{B}$ за чије затворење тврдимо да чини скуп свих истиносних функција $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, применом којих операција на елементе скупа $\mathscr{B}$ смо то затворење генерисали? То је питање у вези са следећим важним појмом универзалне алгебре.

Ако је $\mathscr{B}$ скуп истиносних функција, онда ћемо са $[\mathscr{B}]$ да означавамо *клон* генерисан скупом $\mathscr{B}$. То је најмањи скуп истиносних функција такав да важи:

(1) $\mathscr{B} \subseteq [\mathscr{B}]$;
(2) $[\mathscr{B}]$ садржи све *пројекције* $\pi_k^m(x_1,\ldots,x_m) = x_k$, где су $x_1,\ldots,x_m \in \{0,1\}$ и $1 \leq k \leq m$;
(3) $[\mathscr{B}]$ је затворен за *композицију*, тј. ако су $g, g_1,\ldots,g_n$ у $[\mathscr{B}]$ и $g \in B_n$, док су $g_1,\ldots,g_n \in B_m$, онда је и следећа функција у $[\mathscr{B}]$:

$$g(g_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_n(x_1,\ldots,x_m)).$$

Да бисмо боље разумели овај појам, даћемо неколико сасвим једноставних примера. Прво, приметимо да ако нам је дата функција $f \in B_2$, онда можемо да дефинишемо

$$f(\pi_2^2(x_1,x_2),\pi_1^2(x_1,x_2)),$$

и то је функција која пар (x_1,x_2) пресликава у $f(x_2,x_1)$. Дакле, служећи се композицијом и пројекцијама можемо да *пермутујемо* аргументе наших функција. Са друге стране

$$f(\pi_1^2(x_1,x_2),\pi_1^2(x_1,x_2))$$

је функција која пар (x_1,x_2) пресликава у $f(x_1,x_1)$. Дакле, аргументе можемо и да *изједначавамо*. Осим тога, можемо да додајемо још и *привидне* аргументе од којих вредност функције не зависи:

$$f(\pi_1^3(x_1,x_2,x_3),\pi_3^3(x_1,x_2,x_3)).$$

Ова последња функција тројку (x_1,x_2,x_3) пресликава у $f(x_1,x_3)$ и не зависи од вредности другог аргумента.

Као што је једноставно да се види у случају изједначавања аргумената, често ћемо имати да компоновањем функција које су арности ≥ 2 добијамо функције које су *заправо* мање арности. Међутим, компоновањем функција од којих ниједна није нуларна, тј. елемент скупа $\{0, 1\}$, *не можемо* да генеришемо нуларне функције.

Да бисмо овај проблем решили, можемо да допустимо још и операцију која ће *смањити* арност функције елиминисањем оних аргумената од којих вредност те функције *не зависи*. Дакле, могли бисмо нашу дефиницију клона да допунимо још и следећим условом:

Ако је функција $g \in B_m$ у $[\mathscr{B}]$ и за све $x_1, \ldots, x_m, y$ из $\{0, 1\}$ имамо да важи

$$g(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \ldots, x_m),$$

онда је и функција $g^- \in B_{m-1}$ елемент клона $[\mathscr{B}]$, где опет имамо да за све $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$ из $\{0, 1\}$ важи

$$g^-(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m),$$

за произвољно y из $\{0, 1\}$.

Оно што ће нам ово омогућити јесте да из константних функција једног аргумента добијемо константе из $\{0, 1\}$, тј. одговарајуће нуларне функције. Иначе све што можемо на овај начин да генеришемо могли смо исто тако и раније, не служећи се овом операцијом.

Сада можемо да се вратимо доказима тврђења које смо раније најавили. Дакле, да бисмо доказали *Постову теорему* биће нам потребна два помоћна тврђења. Прво од њих је следеће:

Тврђење 2.6.2. Функција $f_\neg$ као и обе константне функције једног аргумента могу да се дефинишу помоћу функција f_1, f_2, f_3 и f_4 одозго.

Доказ. Прво ћемо да посматрамо наше функције f_1 и f_2 и да им изједначимо аргументе да бисмо дефинисали:

$$g_1(x) = f_1(x, \ldots, x)$$

као и

$$g_2(x) = f_2(x, \ldots, x).$$

Овде можемо да разликујемо два случаја. Или је $g_1(1) = 1$, па је g_1 константна функција која увек даје вредност један, или је $g_1(1) = 0$, па је g_1 функција $f_\neg$. Слично томе, функција g_2 је или константна функција која увек даје вредност нула, или је функција $f_\neg$.

Пошто када применимо функцију $f_\neg$ на ма коју од константних функција једног аргумента добијамо ону другу, можемо да закључимо да или можемо да дефинишемо $f_\neg$, или обе константне функције једног аргумента, или пак све три функције.

Претпоставимо прво да можемо да дефинишемо $f_\neg$. Посматрајмо нашу функцију f_3 која није само-дуална. Дакле, постоје неки $x_1, \ldots, x_n$ из $\{0,1\}$ такви да важи

$$f_3(x_1, \ldots, x_n) = f_3(\neg x_1, \ldots, \neg x_n).$$

Ако сада, слично ономе што смо имали на почетку овог одељка, узмемо да је, за свако $i = 1, \ldots, n$:

$$\epsilon_i = \begin{cases} \text{ништа} & \text{за } x_i = 1, \\ \neg & \text{за } x_i = 0, \end{cases}$$

онда можемо да дефинишемо функцију g једног аргумента као:

$$g(x) = f_3(\epsilon_1 x, \ldots, \epsilon_n x).$$

Онда ћемо имати да важи:

$$g(1) = f_3(x_1, \ldots, x_n) = f_3(\neg x_1, \ldots, \neg x_n) = g(0).$$

Дакле, функција g је константна функција једног аргумента, па помоћу ње и функције $f_\neg$ можемо да дефинишемо и другу константну функцију.

Са друге стране, претпоставимо да можемо да дефинишемо обе константне функције једног аргумента и посматрајмо нашу функцију f_4. Пошто она није монотона, то значи да постоје $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ из $\{0,1\}^n$ такви да је $x_i \leq y_i$, за свако $i = 1, \ldots, n$ али

$$f_4(x_1, \ldots, x_n) > f_4(y_1, \ldots, y_n).$$

Другим речима, имамо да је

$$f_4(x_1, \ldots, x_n) = 1 \text{ и } f_4(y_1, \ldots, y_n) = 0.$$

Узмимо сада да је:

$$\epsilon_i x = \begin{cases} x & \text{за } x_i < y_i, \\ x_i & \text{за } x_i = y_i. \end{cases}$$

Приметимо само да су нам горе биле неопходне две константне функције за случајеве када је $x_i = y_i = 0$ и $x_i = y_i = 1$. Служећи се функцијом f_4 сада можемо да дефинишемо $f_\neg$ овако:

$$f_\neg(x) = f_4(\epsilon_1 x, \ldots, \epsilon_n x).$$

Да бисмо то видели, само треба да приметимо да је

$$f_\neg(0) = f_4(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

као и

$$f_\neg(1) = f_4(y_1, \ldots, y_n) = 0.$$

$\dashv$

Пре него што докажемо друго тврђење које ће нам бити потребно да бисмо доказали *Постову теорему* треба да знамо још и следеће. Ако је $f(x_1, \ldots, x_n)$ истиносна функција, онда она може на *јединствен* начин да се представи помоћу такозваног *Жегалкиновог полинома*:

$$c_0 + \sum_{k>0; 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} c_{i_1 \ldots i_k} x_{i_i} \ldots x_{i_k},$$

где су $c_0, c_{i_1 \ldots i_k} \in \{0, 1\}$. Овде смо са $\sum$ означили уопштену операцију $+$, сабирања по модулу 2, као у дефиницији појма линеарне функције горе.

Доказ тврђења из претходног пасуса није тежак и читалац може да га нађе у књизи [**7**] (в. Задатак 11 на стр. 208). Сада, помоћу тог резултата можемо да докажемо друго тврђење на које ћемо да се ослонимо када будемо доказивали *Постову теорему* (в. [**7**], Задатак 22 на стр. 211).

Тврђење 2.6.3. Служећи се функцијама $f_1, \ldots, f_5$ можемо да дефинишемо функцију $f_\wedge$.

Доказ. Пошто наша функција f_5 није линеарна, полином који јој одговара мора да садржи моном облика $x_i x_j p$ где су i и j такви да важи $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ а p је производ неких од преосталих промењљивих из $\{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$ или је пак $p = 1$.

Посматрајмо сада неки такав моном са најмањим бројем промењљивих у p. Свакој промењљивој из p ћемо да припишемо вредност 1 па ћемо имати да је $p = 1$, док ћемо свим осталим промењљивима, осим x_i и x_j, да припишемо вредност 0. Тиме смо функцију f_5 свели на функцију h два аргумента, која такође није линеарна:

$$h(x_i, x_j) = c_0 + c_i x_i + c_j x_j + x_i x_j.$$

Служећи се функцијом h можемо да дефинишемо функцију f два аргумента на следећи начин:

$$f(x_i, x_j) = h(x_i + c_j, x_j + c_i) + c_0 + c_i c_j.$$

Није тешко да се провери да ће тада важити да је $f = f_\wedge$. $\dashv$

Сада можемо да се вратимо доказу *Постове теореме* који смо раније најавили.

Доказ Постове теореме. Приметимо прво да, с лева на десно, тврђење једноставно следи на основу Последице 2.2.2 горе. Јер ако је наш скуп везника $\mathscr{C}$ подскуп једног од пет скупова из тврђења, онда он није функционално потпун.

Да бисмо доказали тврђење здесна на лево, приметимо прво да на основу Тврђења 2.6.2 и 2.6.3 која смо доказали следи да служећи се везницима из $\mathscr{C}$ можемо да дефинишемо везнике $\neg$ и $\wedge$. Међутим, скуп везника $\{\neg, \wedge\}$ је, као што већ знамо, функционално потпун па је теорема доказана.

$\dashv$

Погледајмо сада како бисмо могли да се послужимо тестом из *Постове теореме* да бисмо проверили да ли је неки скуп везника функционално потпун. Да бисмо то на прегледан начин представили, конструисаћемо такозване *Постове таблице*.

	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	**SD**	**M**	**L**
$\wedge$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\vee$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\neg$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

Када желимо да проверимо да ли је неки скуп везника функционално потпун, треба само за те везнике да направимо таблицу као горе и да видимо да ли се у свакој од колона знак $-$ јавља макар једном. То значи да везник који се у том реду налази не припада одговарајућој Постовој класи. Пошто таблица коју смо горе направили има то својство, можемо да закључимо да је скуп везника $\{\neg, \vee, \wedge\}$ функционално потпун, што смо наравно већ знали.

Ако сада погледамо таблицу за скуп везника $\{\neg, \wedge\}$

	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	**SD**	**M**	**L**
$\wedge$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\neg$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

можемо да видимо да се у свакој од колона знак $-$ јавља макар једном па је и овај скуп везника функционално потпун. Међутим, ако погледамо таблицу за скуп везника $\{\wedge, \vee\}$

	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	**SD**	**M**	**L**
$\wedge$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\vee$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$

видимо да сада у овом скупу нема везника који не припадају скуповима $\mathbf{P_0}$ и $\mathbf{P_1}$, као ни везника који није монотон. Дакле, можемо да закључимо да тај скуп везника није функционално потпун.

Пошто смо видели да један везник може да припада већем броју Постових класа, можемо да се питамо да ли постоје везници који не припадају ниједној од њих? Такви везници постоје и често се на све њих скупа реферира као на *Шеферове везнике*. Има свега два таква бинарна везника, $\uparrow$ и $\downarrow$, а таблице које њима одговарају су следеће:

x_1	x_2	$f_\uparrow(x_1, x_2)$	$f_\downarrow(x_1, x_2)$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Први од ових везника се понекад и сам назива Шеферовим везником и једноставно је да се види да њега можемо да дефинишемо као негацију конјункције. Други везник се понекад назива и *Персовом стрелом* и њега дефинишемо као негацију дисјункције. Ако сада погледамо Постову таблицу за ове везнике:

	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	**SD**	**M**	**L**
$\uparrow$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\downarrow$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

видимо да је сваки од скупова $\{\uparrow\}$ и $\{\downarrow\}$ функционално потпун. То су једини функционално потпуни скупови бинарних везника који су синглтони. Нуларних као ни унарних таквих везника нема, али они зато постоје у свакој арности $n \geq 2$ и има их укупно

$$2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}.$$

Теорема компактности. Следећа једноставна лема која уопштава последња два тврђења из Задатка 2.1 доводи у везу појмове семантичке последице и задовољивости:

Лема 2.1. *Нека је* Γ *произвољан скуп формула и* φ *формула. Онда важи* $\Gamma \models \varphi$ *акко скуп* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *није задовољив.*

Доказ. Ако важи $\Gamma \models \varphi$ и скуп $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ је задовољив, узмимо валуацију v која задовољава $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Пошто v задовољава Γ и $\neg\varphi$, следи да $\Gamma \not\models \varphi$. У супротном смеру, ако скуп $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ није задовољив и $\Gamma \not\models \varphi$, узмимо валуацију v која задовољава Γ али не и φ. За такво v важи да је $v(\neg\varphi) = 1$, тј. v задовољава $\neg\varphi$ па ова валуација задовољава и $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. $\dashv$

Следећа теорема је један од најважнијих резултата који се тиче семантике исказне логике.

Теорема 2.4 (Теорема компактности). *Ако је* Γ *коначно задовољив скуп формула, онда је* Γ *задовољив.*

Да бисмо доказали ову теорему, прво ћемо да докажемо једно помоћно тврђење.

Тврђење 2.1. *Ако је* Γ *коначно задовољив и* φ *је формула, онда је један од скупова,* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *или* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$*, коначно задовољив.*

Доказ. Претпоставимо да је Γ коначно задовољив и да скуп $\Gamma \cup \{\varphi\}$ није коначно задовољив. Показаћемо да онда скуп $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ мора да буде коначно задовољив.

Нека је $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ коначан скуп такав да $\Gamma_0 \cup \{\varphi\}$ није задовољив и узмимо да је Γ_1 произвољан коначан подскуп од Γ. Скуп $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ је коначан подскуп од Γ, па је на основу хипотезе теореме задовољив. То значи да постоји валуација v таква да је $v(\psi) = 1$, за свако $\psi \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Пошто валуација v задовољава Γ_0, имаћемо да је $v(\varphi) = 0$ па је $v(\neg\varphi) = 1$. Дакле, валуација v задовољава скуп

$$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\},$$

па тако и скуп $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\}$. Другим речима, скуп $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ је коначно задовољив и тиме је помоћно тврђење доказано. $\dashv$

Доказ Теореме 2.4. Вратимо се сада доказу *Теореме компактности* и претпоставимо да је Γ коначно задовољив. Нека је

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

низ који садржи све исказне формуле. Сада ћемо рекурзивно да дефинишемо скупове Γ_n, за $n \geq 0$, пошавши од скупа Γ.

Нека је $\Gamma_0 = \Gamma$. Претпоставимо да су скупови $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$ дефинисани, да важи $\Gamma_0 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_n$ (овакве низове скупова понекад зовемо и *монотоно растућим*) и да је Γ_n коначно задовољив. На основу помоћног тврђења, један је од скупова $\Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$ или $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}$ коначно задовољив. Нека је

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\},$$

ако је $\Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$ коначно задовољив. Иначе, нека је

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}.$$

Сада имамо да важи $\Gamma_0 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_{n+1}$ и скуп Γ_{n+1} је коначно задовољив. Дефинишимо

$$\Gamma_\infty = \bigcup_{n\geq 0} \Gamma_n.$$

Скуп Γ_∞ је коначно задовољив, пошто је сваки коначан $\Delta \subseteq \Gamma_\infty$ садржан у неком Γ_n. Овај скуп Γ_∞ зовемо још и *максималним* коначно задовољивим скупом. То је зато што за сваку формулу φ имамо да важи $\varphi \in \Gamma_\infty$ или $\neg\varphi \in \Gamma_\infty$ (ако је φ произвољна формула, онда постоји неко $n \geq 1$ такво да је $\varphi = \varphi_n$ – на основу конструкције имамо да $\varphi \in \Gamma_n$ или $\neg\varphi \in \Gamma_n$, а знамо да је $\Gamma_n \subseteq \Gamma_\infty$).

Дефинишимо сада валуацију v_b на следећи начин:

$$v_b(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{ако } p_i \in \Gamma_\infty, \\ 0 & \text{ако } \neg p_i \in \Gamma_\infty. \end{cases}$$

Тврдимо да за сваку формулу φ важи $\varphi \in \Gamma_\infty$ ако и само ако $v(\varphi) = 1$.

Претходно ћемо да докажемо индукцијом по сложености формуле φ. Ако је формула φ исказно слово p_i, онда на основу дефиниције основне валуације v_b имамо

$$v_b(p_i) = v(p_i) = 1 \Leftrightarrow p_i \in \Gamma_\infty.$$

Ако је формула φ облика $\neg\psi$, онда имамо

$$\begin{aligned} v(\varphi) = 1 &\Leftrightarrow v(\psi) = 0 \\ &\Leftrightarrow \psi \notin \Gamma_\infty \\ &\Leftrightarrow \neg\psi \in \Gamma_\infty \\ &\Leftrightarrow \varphi \in \Gamma_\infty. \end{aligned}$$

Друга од еквиваленција горе важи на основу индуктивне хипотезе а трећа на основу максималности скупа Γ_∞.

Ако је формула φ облика $\psi \to \sigma$, онда ћемо имати да важи

$$\begin{aligned} v(\varphi) = 1 &\Leftrightarrow v(\psi) = 0 \text{ или } v(\sigma) = 1 \\ &\Leftrightarrow \psi \notin \Gamma_\infty \text{ или } \sigma \in \Gamma_\infty \\ &\Leftrightarrow \neg\psi \in \Gamma_\infty \text{ или } \sigma \in \Gamma_\infty. \end{aligned}$$

Претпоставимо сада да је $v(\varphi) = 1$. Пошто је Γ_∞ коначно задовољив, имамо да $\{\neg\psi, \neg(\psi \to \sigma)\} \not\subseteq \Gamma_\infty$ као и $\{\sigma, \neg(\psi \to \sigma)\} \not\subseteq \Gamma_\infty$. Дакле, $\neg(\psi \to \sigma) \notin \Gamma_\infty$ па имамо да је $\psi \to \sigma \in \Gamma_\infty$.

Са друге стране, претпоставимо да $\psi \to \sigma \in \Gamma_\infty$. Пошто је Γ_∞ коначно задовољив, имамо да $\{\psi, \neg\sigma, \psi \to \sigma\} \not\subseteq \Gamma_\infty$. Дакле, или $\psi \notin \Gamma_\infty$ или пак $\neg\sigma \notin \Gamma_\infty$, тј. $\sigma \in \Gamma_\infty$. Одатле, на основу еквиваленција горе имамо да је $v(\psi \to \sigma) = 1$. $\dashv$

Последица 2.4.1. *Ако је $\Gamma \models \varphi$, онда постоји коначно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такво да је $\Gamma_0 \models \varphi$.*

Доказ. Претпоставимо да $\Gamma_0 \not\models \varphi$, за свако коначно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. На основу Леме 2.1, имамо да је $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi\}$ задовољив, за свако коначно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Дакле, скуп $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ је коначно задовољив, па је на основу *Теореме компактности* (2.4) задовољив. Поново на основу Леме 2.1, имамо да је $\Gamma \not\models \varphi$. $\dashv$

Задатак 2.2. *Докажите да Последица 2.4.1 повлачи Теорему 2.4 и да су тако ова два тврђења еквивалентна.*

Последице компактности. *Теорема компактности* (2.4) је врло корисна када желимо да својства коначних структура проширимо на њихове бесконачне варијанте. Прво ћемо да наведемо једну њену последицу из теорије графова.

Дефиниција 2.7. *Граф* је уређени пар $G = (V, E)$ где је $V \neq \emptyset$ скуп чворова графа G, а E скуп ивица овог графа, тј. E је скуп неуређених парова $\{x, y\}$, где су $x \neq y$ чворови. За подскуп $W \subseteq V$, *индуковани подграф* $G|_W = (W, E')$ има за скуп својих ивица:

$$E' = \{\{x, y\} \mid x, y \in W\}.$$

Бојење графа $G = (V, E)$ у k боја је једна функција $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ таква да, ако је $\{x, y\} \in E$, онда је $c(x) \neq c(y)$.

Теорема 2.5. *Пребројиви граф $G = (V, E)$ допушта бојење у k боја ако и само ако сваки његов коначни индуковани подграф допушта бојење у k боја.*

Доказ. С лева на десно, претпоставимо да граф G допушта бојење у k боја и нека је $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ произвољна функција бојења. Узмимо да је $G|_W$ произвољан коначан индуковани подграф од G. Онда је $c_0 = c \restriction W$ једно бојење у k боја графа $G|_W$.

Здесна на лево послужићемо се *Теоремом компактности* (2.4). Прво, треба да одаберемо подесан језик исказне логике и то тако што ћемо имати исказно слово за сваки избор који у нашој конструкцији треба да направимо. Имаћемо, дакле, следећа исказна слова у нашем језику

$$p_{x,i} \quad \text{за свако } x \in V \text{ и } i = 1, \dots, k.$$

Дакле, наша су исказна слова индексирана чворовима графа G и $p_{x,i}$ значи: *обоји чвор* x *у боју* i.

После тога, треба да издвојимо одређене формуле које ће да намећу одговарајуће услове нашим валуацијама. Узмимо да је Γ скуп формула следећег облика:

(1) $p_{x,1} \vee \ldots \vee p_{x,k}$, за $x \in V$;
(2) $\neg(p_{x,i} \wedge p_{x,j})$, за $x \in V$ и $1 \leq i \neq j \leq k$;
(3) $\neg(p_{x,i} \wedge p_{y,i})$, за сваки пар $\{x, y\} \in E$ и $1 \leq i \leq k$.

Сада, треба да проверимо да смо одабрали одговарајући скуп формула Γ. Да бисмо то видели, претпоставимо да је v валуација која задовољава Γ. Онда можемо да дефинишемо бојење $c : V \to \{1, \dots, k\}$ на следећи начин:

$$c(x) = i \Leftrightarrow v(p_{x,i}) = 1.$$

На основу (1) и (2) горе, сваком ће чвору да буде приписана јединствена боја (за свако $x \in V$ постоји јединствено $i = 1, \dots, k$ такво да је $v(p_{x,i}) = 1$). Дакле $c : V \to \{1, \dots, k\}$ је функција. На основу (3), ако је $\{x, y\} \in E$, онда x и y добијају различиту боју. Дакле, c је једно бојење у k боја.

Сада ћемо да покажемо да је скуп Γ коначно задовољив. Узмимо неко коначно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и нека је $W \subseteq V$ коначан скуп чворова који се спомињу у скупу Γ_0. Онда коначан индуковани подграф $G|_W$ допушта бојење у k боја. Нека је

$$c : W \to \{1, \dots, k\}$$

једно бојење у k боја графа $G|_W$. Посматрајмо сада валуацију v такву да ако је $x \in W$ и $i = 1, \dots, k$, онда важи:

$$v(p_{x,i}) = 1 \Leftrightarrow c(x) = i.$$

Јасно је да ова валуација задовољава скуп Γ_0. Дакле, на основу *Теореме компактности* (2.4), скуп Γ је задовољив па граф G допушта бојење у k боја. $\dashv$

Сада ћемо да наведемо једну од последица *Теореме компактности* (2.4) која се тиче проширења парцијалних уређења.

Теорема 2.6. *Нека је* $(X, <_p)$ *једно пребројиво парцијално уређење. Онда постоји линеарно уређење* $<_l$ *на скупу* X *које шири* $<_p$.

Доказ. Као и у претходном случају, прво треба да фиксирамо одговарајући језик исказне логике. Узмимо да су сада наша исказна слова индексирана на следећи начин:

$$p_{x,y} \quad \text{за различите } x, y \in X.$$

Нека је Γ следећи скуп формула:

(1) $p_{x,y} \vee p_{y,x}$, за различите $x, y \in X$;
(2) $\neg(p_{x,y} \wedge p_{y,x})$, за различите $x, y \in X$;
(3) $((p_{x,y} \wedge p_{y,z}) \to p_{x,z})$, за различите $x, y, z \in X$;
(4) $p_{x,y}$, за различите $x, y \in X$ такве да је $x <_p y$.

Претпоставимо сада да је v валуација која задовољава скуп Γ. Дефинишимо релацију $<_l$ на скупу X овако:

$$x <_l y \Leftrightarrow v(p_{x,y}) = 1.$$

Онда је $<_l$ линеарно уређење које шири $<_p$.

Да бисмо то видели, приметимо да је $<_l$ ирефлексивна. На основу (1) и (2) следи да $<_l$ задовољава тоталност. На основу (3) релација $<_l$ је транзитивна а на основу (4) шири $<_p$.

Покажимо сада да је Γ коначно задовољив. Узмимо неко коначно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Нека је $X_0 \subseteq X$ коначан скуп елемената из X који се спомињу у Γ_0. Посматрајмо парцијално уређење $(X_0, <_p)$. Онда постоји линеарно уређење $<_l$ на X_0 које шири $<_p$. Узмимо сада да је v валуација таква да за различите $x, y \in X_0$ имамо да важи:

$$v(p_{x,y}) = 1 \Leftrightarrow x <_l y.$$

Овако дефинисана валуација задовољава скуп Γ_0. На основу *Теореме компактности* (2.4), скуп Γ је задовољив. Дакле, постоји линеарно уређење $<_l$ на X које шири $<_p$. $\dashv$

Следеће важно тврђење, са којим смо се већ срели у Уводу, је такође једноставна последица ове теореме.

Теорема 2.7 (Кенигова лема). *Нека је $(T, \prec)$ бесконачно, коначно гранајуће дрво. Онда постоји бесконачна грана B у T.*

Доказ. Нека је $(T, \prec)$ бесконачно, коначно гранајуће дрво. У таквом дрвету је сваки ниво $L_T(n)$ коначан, па је T пребројив. Узећемо сада да су исказна слова нашег језика индексирана елементима скупа T, $\{p_t \mid t \in T\}$. Нека је Γ скуп који садржи следеће формуле:

(1) $p_{t_1} \vee \ldots \vee p_{t_k}$, где је $L_T(n) = \{t_1, \ldots, t_k\}$ и $n \geq 0$;
(2) $\neg(p_{t_i} \wedge p_{t_j})$, где је $L_T(n) = \{t_1, \ldots, t_k\}$, $n \geq 0$ и $1 \leq i < j \leq k$;
(3) $p_t \to p_s$, за $s, t \in T$ такве да важи $s \prec t$.

Претпоставимо да је v валуација која задовољава Γ. Показаћемо да је

$$B = \{t \in T \mid v(p_t) = 1\}$$

бесконачна грана у T.

Из (1) и (2) горе следи да B сече сваки ниво дрвета T у тачно једној тачки. Претпоставимо да је $s, t \in B$ и да је $s \neq t$. Онда ћемо, без губитка општости, имати да је $h_T(s) < h_T(t)$. Нека је $h_T(s) = n$. На основу (3), B мора да садржи претходника од t из $L_T(n)$, који мора да буде једнак s. Дакле, имамо да је $s \prec t$, па следи да је скуп B линеарно уређен.

Тврдимо да је скуп Γ коначно задовољив. Нека је $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ коначан. Онда постоји $n \geq 0$ такво да, ако се t спомиње у Γ_0, онда је $h_T(t) < n$. Узмимо $t_0 \in L_T(n)$ и нека је w валуација таква да за свако $t \in T$ за које важи $h_T(t) < n$,

$$w(p_t) = 1 \Leftrightarrow t \prec t_0.$$

Јасно је да w задовољава Γ_0. На основу *Теореме компактности* (2.4), скуп Γ је задовољив па T има бесконачну грану. $\dashv$

Са друге стране, *Кениговом лемом* можемо да се послужимо да бисмо дали један комбинаторни доказ *Теореме компактности* (2.4). Ево како тај доказ изгледа:

Доказ теореме компактности. Претпоставимо да је Γ коначно задовољив скуп исказних формула нашег језика $\mathscr{L}$. Дефинисаћемо дрво $(T, \prec)$ на следећи начин:

- $L_T(0) = \{\emptyset\}$,
- ако је $n \geq 1$, онда се на нивоу $L_T(n)$ налазе све парцијалне валуације $v : \{p_1, \ldots, p_n\} \to \{0, 1\}$ које задовољавају сваку формулу из Γ у којој се спомињу само исказна слова $p_1, \ldots, p_n$.

Парцијално уређење $\prec$ на T дефинисаћемо овако: претпоставимо да $v \in L_T(n)$ и $v' \in L_T(m)$, где је $1 \leq n < m$, и узмимо да је

$$v \prec v' \Leftrightarrow v = v' \restriction \{p_1, \ldots, p_n\}.$$

Пошто имамо да је $|L_T(n)| \leq 2^n$, сваки од нивоа нашег дрвета је коначан.

Тврдимо да за свако $n \geq 0$ имамо да је $L_T(n) \neq \emptyset$. Можемо само на основу дефиниције нашег дрвета горе да претпоставимо да је $n \geq 1$. Нека је Γ_n скуп формула из Γ у којима се јављају само исказна слова $p_1, \ldots, p_n$. Ако је скуп Γ_n коначан, онда тврђење следи на основу коначне задовољивости од Γ. Претпоставимо зато да је Γ_n бесконачан. Рецимо да је

$$\Gamma_n = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}.$$

За свако $m \geq 1$, нека је

$$\Delta_m = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}.$$

Онда постоји парцијална валуација $w_m : \{p_1, \dots, p_n\} \to \{0, 1\}$ која задовољава Δ_m. Међутим, на основу Дирихлеовог принципа, у том случају постоји и једно $w : \{p_1, \dots, p_n\} \to \{0, 1\}$ такво да је $w_m = w$ за бесконачно много индекаса $m \geq 1$. Јасно је да $w \in L_T(n)$.

Дакле, имамо да је $(T, \prec)$ једно бесконачно, коначно гранајуће дрво. На основу *Кенигове леме*, постоји грана

$$B = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

у $(T, \prec)$, где $v_n \in L_T(n)$. Из тога ће да следи да је

$$v = \bigcup_{n \geq 0} v_n$$

валуација која задовољава скуп Γ. $\dashv$

3. Формални систем исказне логике

У овом одељку ћемо да дамо пример једног једноставног формалног система за исказну логику. То ће бити хилбертовски формални систем са више аксиома и мало правила извођења. Главни резултат овог одељка и целог овог поглавља је *Теорема потпуности* (3.6) која нам, у једном свом облику, каже да наш формални систем доказује све и само логичке истине исказне логике. Након што дамо доказ те теореме навешћемо и неколико њених лепих последица.

Формални систем $\mathscr{H}_I$. Како смо управо рекли, сада ћемо да опишемо један формални систем за исказну логику, који ћемо да зовемо $\mathscr{H}_I$. Овај формални систем ће да садржи једно *правило извођења*, *модус поненс* и три *схеме аксиома*. Свака од тих схема стајаће место бесконачно много аксиома тог облика.

Дефиниција 3.1. Скуп *аксиома* формалног система $\mathscr{H}_I$ чине све формуле следећих облика:

($\mathbf{A_1}$) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,
($\mathbf{A_2}$) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$,
($\mathbf{A_3}$) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$.

Као што смо већ напоменули, једино правило извођења у нашем формалном систему биће модус поненс (**MP**):

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Формални системи ове врсте, са пуно аксиома а мало правила извођења зову се *хилбертовски* или *аксиоматски* формални системи. Такви формални системи нису најзгоднији ако желимо да заиста нешто у њима дедукујемо. Ако нас занимају дедукције, боље је да радимо унутар формалних система *природне дедукције* или *система секвената* налик Генценовим. Са друге стране, хилбертовски формални системи, као што је $\mathscr{H}_I$, донекле олакшавају доказивање теорема о формалним системима које ћемо да сретнемо у наставку.

Пре свега тога, дефинисаћемо појам доказа из хипотеза у формалном систему $\mathscr{H}_I$ и показати да он има нека својства која ће га учинити блиским природно-дедукцијским системима.

Дефиниција 3.2. За скуп формула Γ и формулу φ, *доказ формуле φ из скупа хипотеза* Γ је коначан низ формула $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ такав да је $\varphi_n = \varphi$ и за свако $i < n$ важи једно од следећег:

(1) φ_i је аксиома,
(2) $\varphi_i \in \Gamma$,
(3) за неко $j, k < i$ имамо да је $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$.

Пишемо $\Gamma \vdash A$ (што читамо као Γ *доказује* φ, или пак φ је *синтактичка последица* од Γ) ако постоји доказ формуле φ из скупа хипотеза Γ. За формулу φ кажемо да је *теорема* ако важи $\emptyset \vdash \varphi$, тј. ако је она синтактичка последица празног скупа хипотеза. То ћемо скраћено записивати као $\vdash \varphi$. Доказе из хипотеза ћемо у наставку да зовемо још и *дедукцијама* или *извођењима* из Γ.

Приметимо да само на основу дефиниције коју смо управо дали имамо да ако $\Gamma \vdash \varphi$ и $\Gamma \subseteq \Delta$, онда $\Delta \vdash \varphi$. Такође, ако $\Gamma \vdash \varphi$, онда постоји коначно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такво да је $\Gamma_0 \vdash \varphi$. То је зато што су све наше дедукције коначне па могу да се служе само коначним бројем хипотеза из Γ.

Пример 3.1. За сваку формулу φ имамо да је $\vdash \varphi \to \varphi$, на основу следеће дедукције:

$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ $(\mathbf{A_1})$
$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ $(\mathbf{A_2})$
$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ $(\mathbf{MP})$
$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ $(\mathbf{A_1})$
$\varphi \to \varphi$ $(\mathbf{MP})$

Следећих неколико резултата треба да нам помогне да наш хилбертовски формални систем учинимо више налик формалним системима природне дедукције.

Теорема 3.1 (Теорема дедукције). *Ако је $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, онда је $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.*

Доказ. Доказујемо индукцијом по дужини извођења формуле ψ из скупа хипотеза $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Нека је $\psi_1, \ldots, \psi_n = \psi$ дедукција од ψ из $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Разликујемо неколико случајева.

Први случај: $\psi \in \Gamma$. У овом случају имамо следећу дедукцију од $\varphi \to \psi$ из Γ:

ψ (**хипотеза**)
$\psi \to (\varphi \to \psi)$ $(\mathbf{A_1})$
$\varphi \to \psi$ $(\mathbf{MP})$

Други случај: $\psi = \varphi$. У овом случају имамо да $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$, пошто је $\vdash \varphi \to \varphi$ на основу примера горе.

Трећи случај: ψ је аксиома. У овом случају имамо следећу дедукцију од $\varphi \to \psi$:

ψ (**аксиома**)
$\psi \to (\varphi \to \psi)$ ($\mathbf{A_1}$)
$\varphi \to \psi$ (**MP**)

Четврти случај: ψ је закључак примене правила **MP** на формуле σ и $\sigma \to \psi$, које јој у дедукцији претходе. У том случају, имамо следећу дедукцију од $\varphi \to \psi$ из Γ:

$\varphi \to (\sigma \to \psi)$ (**индуктивна хипотеза**)
$(\varphi \to (\sigma \to \psi)) \to ((\varphi \to \sigma) \to (\varphi \to \psi))$ ($\mathbf{A_2}$)
$(\varphi \to \sigma) \to (\varphi \to \psi)$ (**MP**)
$\varphi \to \sigma$ (**индуктивна хипотеза**)
$\varphi \to \psi$ (**MP**)

Овим смо све случајеве исцрпели па је теорема доказана. $\dashv$

Дефиниција 3.3. За скуп формула Γ кажемо да је *инконзистентан* ако постоји формула ψ таква да важи $\Gamma \vdash \psi$ и $\Gamma \vdash \neg\psi$. Иначе кажемо да је Γ *конзистентан*.

Теорема 3.2. *Нека су Γ и Δ скупови формула и $\varphi, \psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ формуле. Онда важи следеће:*

(1) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ акко $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.
(2) $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$ акко $\Gamma \vdash \varphi_1 \to (\ldots \to (\varphi_n \to \psi)\ldots)$.
(3) Γ је конзистентан акко постоји формула σ таква да важи $\Gamma \nvdash \sigma$.
(4) Ако $\Gamma \vdash \sigma$ за свако $\sigma \in \Delta$ и $\Delta \vdash \psi$, онда $\Gamma \vdash \psi$.

Доказ. Тврђење (1) је само *Теорема дедукције* (3.1), заједно са обратом који важи јер, ако нам је дато извођење од $\varphi \to \psi$ из хипотеза Γ, онда можемо да добијемо извођење од ψ из хипотеза $\Gamma \cup \{\varphi\}$ тако што ћемо да применимо **MP** на φ и $\varphi \to \psi$.

Тврђење (2) следи индукцијом по n, где је база индукције, за $n = 1$, тврђење (1).

Да бисмо доказали (3), претпоставимо да је скуп Γ инконзистентан. Нека је ψ формула таква да $\Gamma \vdash \psi$ и $\Gamma \vdash \neg\psi$. Такође, нека је σ произвољна формула. На основу $\mathbf{A_1}$ и **MP** имамо да $\Gamma \vdash \neg\sigma \to \neg\psi$ и $\Gamma \vdash \neg\sigma \to \psi$. Међутим, формула $(\neg\sigma \to \neg\psi) \to ((\neg\sigma \to \psi) \to \sigma)$ је инстанца аксиоме $\mathbf{A_3}$, па пошто два пута применимо **MP** можемо да закључимо да $\Gamma \vdash \sigma$. Импликација у супротном смеру је тривијална. Из овога такође непосредно следи да је скуп Γ инконзистентан ако и само ако $\Gamma \vdash \sigma$, за сваку исказну формулу σ.

Тврђење (4) можемо да докажемо овако: нека је d извођење формуле ψ из хипотеза Δ. Извођење d можемо да трансформишемо у извођење формуле ψ из хипотеза Γ на следећи начин: сваки пут када се формула σ јави у извођењу d, то ћемо јављање да заменимо са извођењем од σ из Γ. $\dashv$

Сада ћемо служећи се *Теоремом дедукције* (3.1) да докажемо неке једноставне резултате који ће нам користити у наставку.

Тврђење 3.1. *За произвољне формуле φ,ψ и θ имамо да важи следеће:*

(1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$,
(2) $\{\varphi \to (\psi \to \theta), \psi\} \vdash \varphi \to \theta$.

Доказ. Да бисмо доказали (2), посматрајмо следећу дедукцију:

1) $\varphi \to (\psi \to \theta)$ (**хипотеза**)
2) ψ (**хипотеза**)
3) φ (**хипотеза**)
4) $\psi \to \theta$ (1,3 **MP**)
5) θ (2,4 **MP**)

Дакле, имамо

$$\{\varphi \to (\psi \to \theta), \psi, \varphi\} \vdash \theta$$

па на основу *Теореме дедукције* (3.1) можемо да закључимо

$$\{\varphi \to (\psi \to \theta), \psi\} \vdash \varphi \to \theta.$$

$\dashv$

Задатак 3.1. *Доказати део (1) претходног тврђења.*

Следећа лема тиче се доказивости *закона двоструке негације* $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ у нашем формалном систему.

Лема 3.1. *За сваку формулу φ имамо да важи:*

(1) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$
(2) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Доказ. Да бисмо доказали (1), посматрајмо следећу дедукцију:

1) $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)$ ($\mathbf{A_3}$)
2) $\neg\varphi \to \neg\varphi$ (Пример 3.1)
3) $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi$ (1,2 Тврђење 3.1 (2))
4) $\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$ ($\mathbf{A_1}$)
5) $\neg\neg\varphi \to \varphi$ (3,4 Тврђење 3.1 (1))

Са друге стране, доказ од (2) изгледао би овако:

1) $(\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to ((\neg\neg\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\varphi)$ $\quad(\mathbf{A_3})$
2) $\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ $\quad$ (део (1) горе)
3) $(\neg\neg\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\varphi$ $\quad$ (1,2 **MP**)
4) $\varphi \to (\neg\neg\neg\varphi \to \varphi)$ $\quad(\mathbf{A_1})$
5) $\varphi \to \neg\neg\varphi$ $\quad$ (3,4 Тврђење 3.1 (1))

$\dashv$

Сада ћемо да наведемо још неколико теорема нашег формалног система $\mathscr{H}_I$ којима ћемо повремено да се служимо у наставку. Све њих је једноставно доказати служећи се *Теоремом дедукције* (3.1) и осталим тврђењима која смо до сада доказали.

Теорема 3.3. *За произвољне формуле φ и ψ имамо да важи:*

(1) $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$
(2) $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$
(3) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$
(4) $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$
(5) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$

Доказ. Доказаћемо само да је формула (4) теорема нашег формалног система. Друге формуле остављамо читаоцу за вежбу. Имамо да је $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$ на основу правила **MP**. На основу *Теореме дедукције* (3.1) следи да је $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$. На основу (3) овог тврђења следи да је

$$\vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)),$$

па на основу Тврђења 3.1 (1) имамо да је

$$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)).$$

$\dashv$

Следећи резултат почива на идеји доказа помоћу *јаког и слабог свођења на апсурд*. Ако из хипотеза $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, односно $\Gamma \cup \{\varphi\}$, можемо да дедукујемо контрадикцију, онда постоји дедукција формуле φ, односно $\neg\varphi$, из хипотеза Γ.

Теорема 3.4. *Нека је Γ скуп формула и φ формула. Онда важи:*

(1) ако је $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ инконзистентан, онда $\Gamma \vdash \varphi$;
(2) ако је $\Gamma \cup \{\varphi\}$ инконзистентан, онда $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Доказ. Доказаћемо само прво од ових тврђења. Друго тврђење је једноставна последица првог и Леме 3.1. Слично као у доказу од (3) из Теореме 3.2, пошто је $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ и $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash$

$\neg\psi$, за неку формулу ψ, можемо да применимо *Теорему дедукције* (3.1) и да закључимо да $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \psi$. Слично томе имамо и да $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$. Међутим, формула $(\neg\varphi \to \neg\psi)) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$ је аксиома $\mathbf{A_3}$, па пошто применимо **MP** два пута можемо да закључимо да је $\Gamma \vdash \varphi$. $\dashv$

Последица 3.4.1. *Нека је Γ скуп формула и φ произвољна формула. Ако је Γ конзистентан, онда је макар један од скупова $\Gamma \cup \{\varphi\}$ и $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ такође конзистентан.*

Доказ. Претпоставимо супротно, нека је скуп Γ конзистентан, док су скупови $\Gamma \cup \{\varphi\}$ и $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ инконзистентни. Дакле, на основу претходног тврђења можемо да закључимо да $\Gamma \vdash \varphi$. Нека је σ произвољна формула. На основу Теореме 3.2 (3) следи да $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \sigma$. Међутим, из овога можемо да закључимо да $\Gamma \vdash \sigma$, па је скуп Γ инконзистентан. $\dashv$

Теорема потпуности. Сада долазимо до централног резултата који се тиче исказне логике, *Теореме потпуности* (3.6). Грубо говорећи, та нам теорема каже да је наш формални систем $\mathscr{H}_I$ *потпун*, тј. да *све* логичке истине исказне логике можемо унутар њега да дедукујемо. Другим речима, ништа више не треба да придодамо нашим аксиомама и правилима извођења јер су они довољни за сврху коју смо им наменили. *Теорема потпуности* (3.6) исказне логике, заједно са *Теоремом ваљаности* (3.5), доводи у везу два сасвим различита појма: појам доказивости $\Gamma \vdash \varphi$ у формалном систему $\mathscr{H}_I$ и појам семантичке последице $\Gamma \models \varphi$. Ти се појмови, један синтаксни и други семантички, поклапају.

Да бисмо претходно речено учинили прецизним прво ћемо да формулишемо *Теорему ваљаности*:

Теорема 3.5 (Теорема ваљаности). *Ако је $\Gamma \vdash \varphi$, онда је и $\Gamma \models \varphi$.*

Доказ. Претпоставимо да је $\Gamma \vdash \varphi$. Индукцијом по дужини доказа од φ из Γ треба да покажемо да важи $\Gamma \models \varphi$.

Претпоставимо прво да је $\varphi \in \Gamma$. У овом случају тривијално следи да је $\Gamma \models \varphi$, јер ако валуација v задовољава Γ, онда задовољава и φ пошто $\varphi \in \Gamma$.

Претпоставимо даље да је φ једна од аксиома. У том случају $\Gamma \models \varphi$, јер су све аксиоме таутологије.

Ако је φ закључак примене правила **MP** на формуле ψ и $\psi \to \varphi$, које јој у дедукцији претходе, на основу индуктивне хипотезе имамо да је $\Gamma \models \psi$ као и $\Gamma \models \psi \to \varphi$. Међутим, ако је v валуација таква да важи $v(\psi \to \varphi) = 1$ и $v(\psi) = 1$, онда мора да важи и да је $v(\varphi) = 1$, па $\Gamma \models \varphi$. $\dashv$

Сада можемо да формулишемо *Теорему потпуности* исказне логике која представља обрат импликације из претходног тврђења.

Теорема 3.6 (Теорема потпуности). *Ако је $\Gamma \models \varphi$, онда је $\Gamma \vdash \varphi$.*

Доказ. Да бисмо наше тврђење доказали, довољно ће бити да докажемо следећу лему:

Лема 3.2. *Ако је Γ конзистентан скуп, онда је Γ задовољив.*

Ево зашто је то случај. Претпоставимо да лема важи и да је $\Gamma \models \varphi$. Онда ћемо имати да скуп $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ није задовољив. Дакле, на основу леме, скуп $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ није конзистентан. На основу Теореме 3.4 онда ће да следи $\Gamma \vdash \varphi$.

Идеја доказа леме је да, пошавши од скупа Γ, тај скуп проширимо до *максимално конзистентног* скупа формула (сасвим слично како смо у доказу *Теореме компактности* (2.4) коначно задовољив скуп формула ширили до максималног коначно задовољивог скупа). Тврђење које каже да то може да се уради за произвољан конзистентан скуп формула Γ често се назива *Линденбаумовом лемом.* Узмимо прво да је

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

низ који садржи све исказне формуле (у случају када имамо непребројиво много исказних формула, требаће нам аксиома избора да бисмо фиксирали једно њихово добро уређење $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha<\beta}$; у нашем је случају скуп $\mathscr{F}$ пребројив па узимамо да је $\beta = \mathbb{N}$). Поново ћемо рекурзивно да дефинишемо скупове Γ_n, за $n \geq 0$, пошавши од скупа Γ.

Нека је, дакле, $\Gamma_0 = \Gamma$ и дефинишимо:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\},$$

ако је $\Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$ конзистентан. Иначе, нека је

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}.$$

Поново имамо да важи $\Gamma_0 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_{n+1} \subseteq \ldots$.

Тврђење 3.3.1. За свако $n \in \mathbb{N}$, скуп Γ_n је конзистентан.

Доказ. Доказујемо индукцијом по n. Скуп $\Gamma_0 = \Gamma$ је конзистентан по претпоставци. Претпоставимо сада да је скуп Γ_n, за $n > 0$ конзистентан. Међутим, на основу конструкције од Γ_{n+1} и Последице 3.4.1 знамо да ће онда и Γ_{n+1} бити конзистентан. $\dashv$

На крају, служећи се скуповима Γ_n, можемо да дефинишемо

$$\Gamma_\infty = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n.$$

Тврђење 3.3.2. Γ_∞ је максимално конзистентан скуп формула, тј. Γ_∞ је конзистентан и за произвољну формулу φ имамо да $\varphi \in \Gamma_\infty$ или $\neg\varphi \in \Gamma_\infty$.

Доказ. Нека је φ произвољна формула. Онда је $\varphi = \varphi_n$, за неко $n \geq 1$ па на основу конструкције имамо да $\varphi \in \Gamma_n$ или $\neg\varphi \in \Gamma_n$. Пошто је $\Gamma_n \subseteq \Gamma_\infty$, следи да $\varphi \in \Gamma_\infty$ или $\neg\varphi \in \Gamma_\infty$.

Скуп Γ_∞ је конзистентан, јер бисмо иначе за неку формулу φ имали да $\Gamma_\infty \vdash \varphi$ као и $\Gamma_\infty \vdash \neg\varphi$. Међутим, пошто су докази коначни, онда мора да постоји неко коначно $\Delta \subseteq \Gamma_\infty$ такво да је $\Delta \vdash \varphi$ као и $\Delta \vdash \neg\varphi$. У том случају ћемо, за довољно велико n, имати да је $\Delta \subseteq \Gamma_n$ па ће и скуп Γ_n бити инконзистентан, што је немогуће. $\dashv$

Тврђење 3.3.3. Ако $\Gamma_\infty \vdash \varphi$, онда је $\varphi \in \Gamma_\infty$.

Доказ. Претпоставимо да $\Gamma_\infty \vdash \varphi$. Ако $\varphi \notin \Gamma_\infty$, онда на основу тврђења горе мора бити да $\neg\varphi \in \Gamma_\infty$. Међутим, онда имамо да је $\Gamma_\infty \vdash \neg\varphi$, па је Γ_∞ инконзистентан. $\dashv$

Сада ћемо дефинисати валуацију v која ће да задовољава скуп Γ_∞ горе. За исказно слово p_i, нека је

$$v_b(p_i) = 1 \Leftrightarrow p_i \in \Gamma_\infty.$$

Приметимо да $v_b(p_i) = 0$ ако и само ако $p_i \notin \Gamma_\infty$ ако и само ако $\neg p_i \in \Gamma_\infty$.

Треба да покажемо да валуација v задовољава Γ_∞. Самим тим, та ће валуација да задовољава и скуп Γ. Да бисмо показали да v задовољава Γ_∞, довољно ће бити да докажемо да важи следеће тврђење:

Тврђење 3.3.4. За сваку формулу φ, $v(\varphi) = 1$ ако и само ако $\varphi \in \Gamma_\infty$.

Доказ. Тврђење ћемо да докажемо индукцијом по сложености формуле φ. Ако је φ исказно слово p_i, онда тврђење следи на основу дефиниције валуације v.

Ако је $\varphi = \neg\psi$, за неку формулу ψ, онда је $v(\varphi) = 1$ ако и само ако $v(\psi) = 0$. На основу индуктивне хипотезе знамо да $v(\psi) = 0$ ако и само ако $\psi \notin \Gamma_\infty$. Међутим, на основу Тврђења 3.3.2 горе имамо да $\psi \notin \Gamma_\infty$ ако и само ако $\neg\psi = \varphi \in \Gamma_\infty$.

Ако је $\varphi = \psi \to \sigma$, за неке формуле ψ и σ, онда на основу индуктивне хипотезе тврђење важи за ове формуле. Сада ћемо размотрити случајеве на основу могућих вредности $v(\psi)$ и $v(\sigma)$.

Претпоставимо прво да је $v(\psi) = 0$. У овом је случају $v(\varphi) = 1$. На основу индуктивне хипотезе $\psi \notin \Gamma_\infty$, па је $\neg\psi \in \Gamma_\infty$. На основу Тврђења 3.3.3, довољно ће бити да покажемо да важи $\neg\psi \vdash \psi \to \sigma$. На основу *Теореме дедукције* (3.1) следи да је за то довољно показати да $\{\neg\psi, \psi\} \vdash \sigma$ а ово последње следи из Теореме 3.4, пошто је скуп $\{\neg\psi, \psi, \neg\sigma\}$ инконзистентан.

Претпоставимо даље да је $v(\psi) = 1$ и $v(\sigma) = 1$. Онда је $v(\varphi) = 1$ и на основу индуктивне хипотезе знамо да $\psi \in \Gamma_\infty$ и $\sigma \in \Gamma_\infty$. Међутим, $\sigma \vdash \psi \to \sigma$ пошто је $\sigma \to (\psi \to \sigma)$ аксиома. Дакле, $\Gamma_\infty \vdash \psi \to \sigma$, па на основу Тврђења 3.3.3 следи $\psi \to \sigma = \varphi \in \Gamma_\infty$.

На крају, претпоставимо да је $v(\psi) = 1$ и $v(\sigma) = 0$. У овом је случају $v(\varphi) = 0$ и на основу индуктивне хипотезе знамо да $\psi \in \Gamma_\infty$ и $\sigma \notin \Gamma_\infty$. На основу Тврђења 3.3.2 горе имамо да $\neg\sigma \in \Gamma_\infty$. На основу Тврђења 3.3.3 следи да је довољно показати да $\{\psi, \neg\sigma\} \vdash \neg(\psi \to \sigma)$, пошто ћемо онда имати да $\neg(\psi \to \sigma) \in \Gamma_\infty$ и $\psi \to \sigma = \varphi \notin \Gamma_\infty$ на основу конзистентности од Γ_∞. Да бисмо видели да $\{\psi, \neg\sigma\} \vdash \neg(\psi \to \sigma)$ важи, на основу Теореме 3.4 је довољно да покажемо да је скуп $\{\psi, \neg\sigma, \neg\neg(\psi \to \sigma)\}$ инконзистентан. На основу Леме 3.1 довољно је за то показати да је скуп $\{\psi, \neg\sigma, \psi \to \sigma\}$ инконзистентан. Овај последњи скуп формула, међутим, једноставно доказује σ и $\neg\sigma$, па је заиста инконзистентан. ⊣

Овим смо доказали Лему 3.2, тј. да ако је Γ један конзистентан скуп формула, онда је Γ задовољив. Тиме је и доказ *Теореме потпуности* (3.6) исказне логике завршен. ⊣

Једна од последица *Теореме потпуности* (3.6) је и *Теорема компактности* (2.4) коју смо већ директно доказали раније.

Последица 3.6.1 (Теорема компактности). *Ако је* Γ *коначно задовољив скуп формула, онда је* Γ *задовољив.*

Доказ. Претпоставимо да је скуп формула Γ коначно задовољив. Ако Γ није задовољив, онда је $\Gamma \models \bot$. На основу *Теореме потпуности* (3.6) имамо да је $\Gamma \vdash \bot$. Пошто су докази коначни, постоји коначан скуп $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такав да је $\Gamma_0 \vdash \bot$. На основу *Теореме ваљаности* (3.5) имамо да је $\Gamma_0 \models \bot$, што је немогуће, јер је скуп Γ_0 задовољив а формула $\bot$ је контрадикција. $\dashv$

Као што смо већ напоменули, доказ *Теореме потпуности* (3.6), у случају језика са непребројиво много исказних слова, захтева аксиому избора. То није сасвим прецизно. Да би се *Теорема потпуности* (3.6) доказала у овом општијем облику довољно је користити једно строго слабије тврђење. Реч је о *Теореми о простом идеалу*. У ствари, у теорији **ZF**, *Теорема потпуности* (3.6) је еквивалентна овом тврђењу, које је еквивалентно тврђењу да се сваки филтер на неком скупу може да прошири до ултрафилтера.

Логика првог реда

4. Језици првог реда

Сада ћемо да уведемо основне појмове логике првог реда. Као и у случају исказне логике, и овде ћемо да почнемо са појмом језика првог реда. Ти су језици, за разлику од језика исказне логике, знатно сложенији. Та сложеност, међутим, носи са собом много већу изражајну моћ него што је то био случај са језицима исказне логике. Она ће нам омогућити да представимо све дедукције које срећемо у математици.

Структуре и језици структура. Као што смо већ рекли, језици исказне логике и језици првог реда се по много чему разликују. Треба, међутим, имати у виду да између њих постоје и бројне сличности. Што се синтаксе језика првог реда тиче, и овде ћемо да почнемо од алфабета и да издвојимо неке смислене речи које су на њему изражене. Семантика језика првог реда ће онда да се састоји у појму интерпретације који ће да припише значење тим нашим смисленим речима. Пре него што прецизно уведемо појам језика првог реда, погледајмо прво како бисмо могли то увођење да оправдамо.

Готово свако математичко тврђење може да се разуме као да нешто говори о *структури* $\mathfrak{A}$ која се састоји од једног непразног скупа A који зовемо *доменом*, *универзумом* или *носачем* ове структуре. Поред тога, између елемената од A могу да постоје извесне *релације* које представљамо скуповима уређених $n-$торки $R \subseteq A^n$ оних елемената који у таквим релацијама стоје. На крају, на домену A могу да постоје и неке *функције* $f : A^n \to A$, као и *константе* или *истакнути елементи* $c \in A$. Функције $f : A^n \to A$ зовемо још и *операцијама на* A.

Појам структуре који смо управио описали зове се још и *релацијско-операцијска структура*, из очигледних разлога. Имамо дакле следеће:

$$\mathfrak{A} = (A; R_1, R_2, \dots, f_1, f_2, \dots, c_1, c_2, \dots).$$

Пример 4.1. Сада ћемо да дамо неколико сасвим једноставних примера релацијско-операцијских структура. Најједноставнији пример структуре чине непразни скупови (A), без релација, функција или истакнутих елемената.

Структура $\mathfrak{A} = (A; R)$, где је $R \subseteq A \times A$, је *парцијално уређење* акко важи:

(1) за свако $a \in A$, $(a, a) \in R$ (рефлексивност);
(2) за свако $a, b, c \in A$, ако $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$, онда $(a, c) \in R$ (транзитивност);
(3) за свако $a, b \in A$, ако $(a, b) \in R$ и $(b, a) \in R$, онда $a = b$ (антисиметричност).

Кажемо да је $\mathfrak{A}$ *линеарно уређење* акко осим претходног важи још и:

(4) за свако $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ или $(b, a) \in R$ (тоталност).

Структура $\mathfrak{A}$ је *строго парцијално уређење* акко је $\mathfrak{A}$ транзитивно и важи:

(5) за свако $a \in A$, $(a, a) \notin R$ (ирефлексивност).

Строго парцијално уређење $\mathfrak{A}$ је *строго линеарно уређење* акко важи још и тоталност у следећем облику:

(6) за свако $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ или $a = b$ или $(b, a) \in R$.

Ако строго линеарно уређење $\mathfrak{A}$ задовољава још и следећи услов:

(7) A има најмање два елемента и за свако $a, b \in A$, ако $(a, b) \in R$, онда постоји $c \in A$ такво да важи $(a, c) \in R$ и $(c, b) \in R$,

онда кажемо да је $\mathfrak{A}$ *густо линеарно уређење*.

Примера ради, ако је X скуп, онда је структура $(\mathfrak{P}(X); \subseteq)$ једно парцијално уређење, то смо већ напоменули у Уводу. Такође, $(\mathbb{N}; <_{\mathbb{N}})$, $(\mathbb{Z}; <_{\mathbb{Z}})$, $(\mathbb{Q}; <_{\mathbb{Q}})$ и $(\mathbb{R}; <_{\mathbb{R}})$ су примери строгих линеарних уређења, од којих су последња два густа.

Семигрупа је структура $(G; *)$, где је операција $* : G \times G \to G$ таква да важи:

(1) за свако $a, b, c \in G$, $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Ако у G постоји константа e таква да је:

(2) за свако $a \in G$, $a * e = a = e * a$,

онда кажемо да је $(G; *, e)$ *моноид*. Ако је $(G; *, e)$ моноид у којем важи још и

(3) за свако $a \in G$ постоји $b \in G$, такво да важи $a * b = e = b * a$,

онда кажемо да је то једна *група*.

Један пример групе је структура $(\mathbb{R}; +, 0)$ (овде је $+$ уобичајена операција сабирања реалних бројева), то је адитивна група реалних бројева. Приметите да структура $(\mathbb{R}; \cdot, 1)$ (где је $\cdot$ операција множења реалних бројева) није група, јер за $0 \in \mathbb{R}$ не важи услов (3) горе.

Прстен је структура $(R; +, -, \cdot, 0)$ где су $+$ и $\cdot$ бинарне, а $-$ унарна операција на R, такви да за све $a, b, c \in R$ важи:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$;
(2) $a + b = b + a$;
(3) $a + 0 = a = 0 + a$;
(4) $a + (-a) = 0 = (-a) + a$;
(5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
(6) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c); \quad (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.

Прстен са јединицом је структура $(R; +, -, \cdot, 0, 1)$ за коју важи још и следећи додатни услов, за свако $a \in R$:

(7) $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.

Поље је структура која, за свако $a, b \in R$, задовољава и следећа два услова:

(8) $a \cdot b = b \cdot a$;
(9) ако је $a \neq 0$, онда постоји $d \in R$такво да важи $a \cdot d = 1$.

Свака од структура које смо навели, као и свака од структура иначе, има свој *тип* који одређује, за свако $n > 0$, колико $n-$арних релација и функција има у датој структури, као и број истакнутих елемената у њој.

За сваки тип имаћемо један језик првог реда са одговарајућим бројем релацијских и функцијских симбола, као и одговарајућим бројем индивидуалних константи. Имамо, дакле, следећу дефиницију:

Дефиниција 4.1. *Језик првог реда* $\mathscr{L}$ је дисјунктна унија следећих скупова:

(1) скупа $\mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}$ *релацијских симбола*; сваки релацијски симбол $\mathsf{R} \in \mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}$ има одговарајућу арност $a(\mathsf{R}) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
(2) скупа $\mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$ *функцијских симбола*; сваки функцијски симбол $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$ има одговарајућу арност $a(\mathsf{f}) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
(3) скупа $\mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}$ *индивидуалних константи*.

Елементе скупа $\mathsf{Rel}^{\mathscr{L}} \cup \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}} \cup \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}$ зовемо *нелогичким симболима* језика $\mathscr{L}$. Важно је истаћи да сваки од ових скупова може да буде и празан. За језик $\mathscr{L}$ кажемо да је *коначан* (*пребројив*, *непребројив*), ако је скуп његових нелогичких симбола коначан (пребројив, непребројив). За произвољан релацијски симбол R или функцијски симбол f, природан број $a(\mathsf{R})$, односно $a(\mathsf{f})$, који им је придружен зваћемо још и *дужином* тих симбола.

Осим ових симбола, који ће да се разликују како се већ у ком језику првог реда затекнемо, сваки језик првог реда има још и следеће *логичке симболе*:

(4) пребројив скуп *индивидуалних променљивих* $\mathsf{V} = \{\mathsf{v}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$;
(5) симболи за *везнике* $\neg$ и $\rightarrow$;
(6) симбол за *једнакост* $=$;
(7) симбол *универзалног квантификатора* $\forall$;
(8) помоћне симболе (и).

Претпостављамо, слично као и раније, да су сви ови симболи различити. Када будемо посматрали неки произвољан језик првог реда $\mathscr{L}$, словима $\mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{R}, \dots$ ћемо да означавамо релацијске симболе, док ћемо словима $\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}, \dots$ да означавамо функцијске симболе. Индивидуалне константе ћемо најчешће означавати словима $\mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}, \dots$. Када буде било потребе, све претходне симболе можемо и да индексирамо на различите начине. На индивидуалне променљиве, елементе скупа V, ћемо да реферирамо служећи се симболима метајезика $x, y, z, \dots$ – опет са или без индекаса.

Приметимо да смо у претходној дефиницији могли да изоставимо део (3) који се тицао индивидуалних константи $\mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}$ и да их посматрамо као *нуларне* функцијске симболе; онда бисмо кодомен функције $a : \mathsf{Rel}^{\mathscr{L}} \cup \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ морали да проширимо нулом.

Погледајмо сада како изгледају језици структура које смо навели у Примеру 4.1 горе.

(1) Језик $\mathscr{L}_=$ нема нелогичких симбола, имамо да је $\mathsf{Rel}^{\mathscr{L}} = \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}} = \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}} = \emptyset$.
(2) Језици структура облика $(A; R)$ имају свега један релацијски симбол R такав да је $a(\mathsf{R}) = 2$. Најчешће, ако говоримо о парцијалним уређењима тај симбол означавамо са $\leq$, док га, ако желимо да говоримо о строгим парцијалним уређењима, означавамо овако $<$. Језике парцијалних уређења онда можемо да означавамо са $\mathscr{L}_{\leq}$, или пак са $\mathscr{L}_{<}$.
(3) Језик теорије група $\mathscr{L}_G$ од нелогичких симбола има један функцијски симбол $*$, такав да је $a(*) = 2$, као и индивидуалну константу $\mathbf{e}$. Ако бисмо, као што је често случај, групу представили као структуру $(G; *, ^{-1}, e)$ где

је $^{-1}: G \to G$ унарна операција, онда бисмо нашем језику $\mathscr{L}_G$ придодали још и функцијски симбол $\mathbf{^{-1}}$, такав да је $a(\mathbf{^{-1}}) = 1$.

(4) Језик прстена $\mathscr{L}_R$ од нелогичких симбола има функцијске симболе $\mathbf{+}, \mathbf{-}$ и $\boldsymbol{\cdot}$, за које важи $a(\mathbf{+}) = a(\boldsymbol{\cdot}) = 2$ и $a(\mathbf{-}) = 1$, као и индивидуалну константу $\mathbf{0}$. Језик прстена са јединицом, као и језик поља, би поред ових симбола имао још и индивидуалну константу $\mathbf{1}$.

Осим претходних структура и језика који им одговарају, за нас ће посебно да буде значајна структура коју ћемо да означавамо са $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; <, +, \cdot, S, 0)$. То је структура природних бројева са уобичајеном релацијом уређења $<$, као и бинарним операцијама сабирања, множења и унарном операцијом следбеника ($n \mapsto n+1$). Одговарајући језик ове структуре би био $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}} = \{\mathbf{<}, \mathbf{+}, \boldsymbol{\cdot}, \mathbf{S}, \mathbf{0}\}$.

Напомена. Важно је имати на уму разлику коју смо горе правили између, рецимо, природног броја нула 0 и симбола $\mathbf{0}$ језика $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}$ који га означава, између унарне операције следбеника $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и симбола $\mathbf{S}$ којим се служимо да на ту операцију реферирамо, итд. Нелогичке симболе језика ћемо зато да означавамо масним слогом када буде постојала бојазан да може да дође до забуне. Слично ћемо да чинимо и по питању симбола за једнакост.

Терми и формуле. Да бисмо дефинисали формуле језика првог реда $\mathscr{L}$ (у наставку ћемо их звати просто формулама), прво треба да дефинишемо појам *терма* нашег језика. Терми су речи, синтактички објекти типа имена, које ћемо да користимо да бисмо помоћу њих реферирали на објекте.

Дефиниција 4.2. Нека је $\mathscr{L}$ језик првог реда. Скупове $\mathscr{T}_n$, за $n \in \mathbb{N}$, дефинишемо на следећи начин:

(1) $\mathscr{T}_0 = \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}} \cup \mathsf{V}$;
(2) $\mathscr{T}_{n+1} = \mathscr{T}_n \cup \{\mathsf{f}t_1 \dots t_m \mid \mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}, a(\mathsf{f}) = m$ и $t_1, \dots, t_m \in \mathscr{T}_n\}$;
(3) $\mathscr{T} = \bigcup_{n \geq 0} \mathscr{T}_n$.

Елементе скупа $\mathscr{T}$ зваћемо *термима* језика $\mathscr{L}$, док ћемо елементе скупа $\mathscr{T}_0$ звати *атомским термима*.

Терме нашег језика $\mathscr{L}$ можемо да замишљамо као *именице*. Атомски терми су најпростија врста именица. Пошавши од њих, служећи се функцијским симболима, градимо сложеније именице нашег језика. Терме ћемо, као и горе, да означавамо словима $t, s, u, \dots$ са или без индекаса.

Као и у случају дефиниције формуле језика исказне логике, и за терме језика $\mathscr{L}$ можемо да докажемо следеће једноставно тврђење које ће нам онда омогућити да доказујемо различите резултате *индукцијом по сложености* терама:

Лема 4.1. *Скуп $\mathscr{T}$ терама језика $\mathscr{L}$ је најмањи скуп речи који садржи атомске терме и који је затворен за примену функцијских симбола одговарајуће дужине. Другим речима:*

(1) $\mathscr{T}_0 \subseteq \mathscr{T}$;
(2) ако је $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$ неки функцијски симбол дужине m, и $t_1, \ldots, t_m \in \mathscr{T}$, онда $\mathsf{f}t_1 \ldots t_m \in \mathscr{T}$;
(3) Ако је Γ ма који скуп речи који задовољава услове (1) и (2) горе, онда $\mathscr{T} \subseteq \Gamma$.

Доказ. Тврђење (1) непосредно следи на основу дефиниције скупа $\mathscr{T}$ коју смо горе дали.

Да бисмо доказали тврђење (2), узмимо да је $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$, $a(\mathsf{f}) = m$ и $t_1, \ldots, t_m \in \mathscr{T}$. За свако t_i, где је $1 \leq i \leq m$, нека је k_i најмање такво да $t_i \in \mathscr{T}_{k_i}$. Узмимо да је $n = \max(k_1, \ldots, k_m)$. Онда ћемо имати да $t_1, \ldots, t_m \in \mathscr{T}_n$, па на основу дефиниције од $\mathscr{T}_{n+1}$ следи да $\mathsf{f}t_1 \ldots t_m \in \mathscr{T}_{n+1}$.

Узмимо сада да је Γ ма који скуп речи који задовољава услове (1) и (2) горе. Треба да покажемо да за свако n важи $\mathscr{T}_n \subseteq \Gamma$. Пошто Γ задовољава услов (1), имамо да $\mathscr{T}_0 \subseteq \Gamma$. Претпоставимо сада да $\mathscr{T}_n \subseteq \Gamma$. Међутим, пошто је на основу (2) Γ затворен за грађење терама применом функцијских симбола, имамо да је $\mathscr{T}_{n+1} \subseteq \Gamma$, па је и индуктивни корак доказан. Дакле, $\mathscr{T} \subseteq \Gamma$. $\dashv$

Пример 4.2. Неки од терама језика теорије група $\mathscr{L}_G$ су $\boldsymbol{e}$, $*\mathsf{v}_1\mathsf{v}_2$ или $**\mathsf{v}_1\boldsymbol{e}*\mathsf{v}_2\boldsymbol{e}$. У језику прстена $\mathscr{L}_R$ неки од терама су v_1, v_2 или $+\cdot\mathsf{v}_1-\mathsf{v}_2\mathsf{v}_3$. У језику $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}$ ће нам, рецимо, посебно бити значајни терми облика $\underbrace{\mathbf{S}\ldots\mathbf{S}}_{n}\mathbf{0}$, за $n \geq 0$. Такве терме језика $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}$ ћемо звати *нумералима* и скраћено ћемо их записивати као $\mathbf{S}^n\mathbf{0}$.

Да бисмо дефинисали појам формуле језика првог реда $\mathscr{L}$, прво ћемо да кажемо шта су то атомске формуле овог језика.

Дефиниција 4.3. *Атомске формуле* језика првог реда $\mathscr{L}$ су све формуле облика $= t_1t_2$ и $\mathsf{R}t_1 \ldots t_n$, где су $t_1, t_2, \ldots, t_n$ терми језика $\mathscr{L}$ и $\mathsf{R} \in \mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}$ је релацијски симбол дужине n. Скуп свих атомских формула језика $\mathscr{L}$ ћемо да означавамо са $\mathsf{At}_{\mathscr{L}}$.

Следећа дефиниција одговара дефиницији формула језика исказне логике.

Дефиниција 4.4. Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда. Скупове $\mathcal{F}_n$, за $n \in \mathbb{N}$, дефинишемо на следећи начин:

(1) $\mathcal{F}_0 = \mathsf{At}_{\mathcal{L}}$;
(2) $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{(\neg\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(\varphi \to \psi) \mid \varphi, \psi \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(\forall x\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{F}_n, x \in \mathsf{V}\}$;
(3) $\mathcal{F} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$.

Елемент скупа $\mathcal{F}$ зваћемо *формулом језика првог реда* $\mathcal{L}$ или краће *формулом*, ако је јасно о ком језику говоримо. Као и у случају исказних формула, опет можемо *ранг формуле* φ језика $\mathcal{L}$, $\mathsf{r}(\varphi)$, да дефинишемо на следећи начин: $\mathsf{r}(\varphi) = 0$, ако је $\varphi \in \mathsf{At}_{\mathcal{L}}$; $\mathsf{r}(\varphi) = n$, ако је $\varphi \in \mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}_{n-1}$.

Као и у случају формула исказне логике и терама језика $\mathcal{L}$ горе, важи следеће:

Лема 4.2. *Скуп $\mathcal{F}$ формула језика $\mathcal{L}$ је најмањи скуп речи који садржи атомске формуле и затворен је за везнике $\neg$, $\to$ и универзалну квантификацију $\forall x$. Другим речима:*

(1) $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$;
(2) ако $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ и $x \in \mathsf{V}$, онда и $(\neg\varphi), (\varphi \to \psi), (\forall x\varphi) \in \mathcal{F}$;
(3) ако је Γ ма који скуп речи који има претходна два својства, онда $\mathcal{F} \subseteq \Gamma$.

Задатак 4.1. *Доказати претходно тврђење.*

Јединствена читљивост. Нека је K функција дефинисана на непразним речима α језика $\mathcal{L}$ тако да је вредност $K(\alpha)$ једнака збиру вредности које K приписује појединачним симболима $\mathfrak{s}$ који се јављају у α, на следећи начин:

$\mathfrak{s}$	c	v_i	(	)	$\neg$	$\to$	$=$	$\forall$	R	f
$K(\mathfrak{s})$	1	1	-1	1	0	-1	-1	-1	$1-n$	$1-n$

У табели горе претпостављамо да су R и f, редом, $n-$арни релацијски и функцијски симболи.

Лема 4.3. *За сваки терм t, $K(t) = 1$. Ако је t' прави иницијални сегмент од t, онда је $K(t') < 1$. Дакле, ниједан прави иницијални сегмент терма није терм.*

Претходно тврђење се једноставно може да докаже индукцијом по сложености терма t. Тај доказ, као и доказе тврђења која следе а који су блиски онима у случају исказне логике остављамо читаоцу за вежбу.

Да бисмо доказали теорему о јединственој читљивости елемената наше синтаксе прво треба да, служећи се претходном лемом, покажемо да јединствена читљивост важи за терме.

Теорема 4.1 (Теорема о јединственој читљивости терама). *Јединствена читљивост важи за терме. Другим речима, за сваки терм t важи тачно једно од следећег:*

(1) $t = \mathsf{c}$, *за неку индивидуалну константу* c;
(2) $t = \mathsf{v}_i$, *за неку промењиву* v_i;
(3) $t = \mathsf{f}t_1 \dots t_n$, *за неки* $n-$*арни функцијски симбол* f *из* $\mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$ *и терме* $t_1, \dots, t_n$. *У овом су случају функцијски симбол* f *и терми* $t_1, \dots, t_n$ *јединствено одређени.*

Следећа техничка лема нам каже да ниједан прави иницијални сегмент формуле није формула. Њен је доказ - индукцијом по сложености формуле φ - сасвим сличан доказу претходног резултата који се тицао терама.

Лема 4.4. *За сваку формулу* φ *имамо да је* $K(\varphi) = 1$. *Ако је* φ' *непразан прави иницијални сегмент од* φ, *онда је* $K(\varphi') < 1$. *Дакле, ниједан прави иницијални сегмент формуле није формула.*

Сада можемо да, служећи се претходним резултатима, докажемо *Теорему о јединственој читљивости* формула предикатске логике.

Теорема 4.2 (Теорема о јединственој читљивости). *Јединствена читљивост важи за формуле. Другим речима, за сваку формулу* φ *језика* $\mathscr{L}$ *важи тачно једно од следећег:*

(1) φ *је* $= t_1 t_2$, *за неке терме* t_1, t_2;
(2) φ *је* $\mathsf{R}t_1 \dots t_n$, *за неки* $n-$*арни релацијски симбол* R *и терме* $t_1, \dots, t_n$;
(3) φ *је* $(\neg\psi)$, *за неку формулу* ψ;
(4) φ *је* $(\psi \to \sigma)$, *за неке формуле* ψ *и* σ;
(5) φ *је* $(\forall x \psi)$, *за неку промењиву* x *и формулу* ψ.

У прва два случаја, $n-$*арни релацијски симбол* R *и сви терми* $t_1, t_2, \dots, t_n$ *су јединствено одређени формулом* φ. *У трећем и четвртом случају, формула* ψ *и формуле* ψ *и* σ *су јединствено одређене, тим редом, формулом* φ, *док су у последњем случају промењива* x *и формула* ψ *такође јединствено одређени формулом* φ.

Задатак 4.2. *Доказати сва тврђења из овог одељка која претходе Теореми 4.2. После тога, по узору на доказ одговарајућег резултата који се тицао исказне логике (в. доказ Теореме 1.1), доказати и Теорему 4.2.*

Слободне и везане промењиве. Као и у случају језика исказне логике, и овде можемо да дефинишемо појмове градивног низа формуле, дрвета формуле, као и скупа потформула формуле φ језика $\mathscr{L}$. Те су дефиниције сасвим једноставна уопштења онога што смо имали раније (в. Дефиницију 1.3). Погледајмо, примера ради, како бисмо сада могли да дефинишемо скуп $\mathcal{S}ub(\varphi)$, где је φ формула језика првог реда $\mathscr{L}$:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S}ub(\varphi) & = & \{\varphi\}, \text{ за свако } \varphi \in \mathsf{At}_{\mathscr{L}}; \\ \mathcal{S}ub((\neg\varphi)) & = & \mathcal{S}ub(\varphi) \cup \{(\neg\varphi)\}; \\ \mathcal{S}ub((\varphi \to \psi)) & = & \mathcal{S}ub(\varphi) \cup \mathcal{S}ub(\psi) \cup \{(\varphi \to \psi)\}; \\ \mathcal{S}ub((\forall x\varphi)) & = & \mathcal{S}ub(\varphi) \cup \{(\forall x\varphi)\}. \end{array}$$

Као и раније, ако је $\psi \in \mathcal{S}ub(\varphi)$, онда кажемо да је формула ψ *потформула* формуле φ. Ако је ψ потформула од φ и ψ је различито од φ, кажемо да је ψ *права потформула* од φ.

Свака формула језика првог реда $\mathscr{L}$ је једна реч, коначан низ симбола. За разлику од језика исказне логике, где је наш алфабет био углавном фиксиран, у случају језика првог реда наш ће алфабет да варира, како се већ буде мењао скуп нелогичких симбола наших језика. Нека је $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ алфабет датог језика првог реда $\mathscr{L}$. Ако је јасно о ком језику говоримо, алфабет тог језика ћемо да означавамо просто са $\mathscr{A}$. Сваку реч α дужине $n \geq 1$ језика $\mathscr{L}$ можемо да поистоветимо са једном функцијом

$$\mathfrak{j}_\alpha : \{1, \dots, n\} \to \mathscr{A}$$

која ће сваком $i \leq n$ да припише симбол који се јавља на $i-$том месту у речи α. Онда је *јављање симбола* из $\mathscr{A}$ један уређени пар $(i, \mathfrak{s})$, где $\mathfrak{s}$ означава симбол који се јавља на $i-$том месту у речи α. Дакле, $(i, \mathfrak{s})$ је јављање симбола $\mathfrak{s}$ на $i-$том месту у речи α ако и само ако је $\mathfrak{j}_\alpha(i) = \mathfrak{s}$.

Пример 4.3. Узмимо, примера ради, језик теорије група $\mathscr{L}_G$ и нека је φ следећа формула:

$$((\forall \mathsf{v}_2 = *\mathsf{v}_2\mathsf{v}_1\mathbf{e}) \to = \mathsf{v}_2\mathbf{e})$$

У овом случају имамо $\mathfrak{j}_\varphi : \{1, \dots, 15\} \to \mathscr{A}$ где, између осталог важи да је: $\mathfrak{j}_\varphi(1) = \mathfrak{j}_\varphi(2) = ($; $\mathfrak{j}_\varphi(5) = \mathfrak{j}_\varphi(12) = =$; $\mathfrak{j}_\varphi(4) = \mathfrak{j}_\varphi(7) = \mathfrak{j}_\varphi(13) = \mathsf{v}_2$ итд. Јављања промењиве v_2 у формули φ су парови $(4, \mathsf{v}_2)$, $(7, \mathsf{v}_2)$ и $(13, \mathsf{v}_2)$.

Дефиниција 4.5. Нека је t терм језика $\mathscr{L}$. Променљиве које се *јављају* у t су оне променљиве које се јављају на макар једном месту у речи t. Често ћемо писати $t(x_1, \ldots, x_n)$ да бисмо означили терм језика $\mathscr{L}$ у коме се не јављају друге променљиве осим $x_1, \ldots, x_n$. Тада ћемо такође да претпостављамо да су све те променљиве различите. Такође, не захтевамо да се све променљиве $x_1, \ldots, x_n$ јављају у t, само да у t нема јављања других променљивих осим ових.

Нека је φ формула језика $\mathscr{L}$ и $\mathsf{j}_\varphi : n \to \mathscr{A}$ њој одговарајућа функција. Рецимо да је $\mathsf{j}_\varphi(i) = \forall$ симбол универзалног квантификатора који се јавља на $i-$том месту у речи φ, за $1 < i < n$. *Опсег јављања* $(i, \forall)$ *квантификатора* $\forall$ је јединствена подреч од φ

$$\psi_{i,\forall} = \mathsf{j}_\varphi(i-1)\forall \ldots \mathsf{j}_\varphi(j),$$

таква да је $\psi_{i,\forall}$ потформула од φ. Јављање (x, k) променљиве $\mathsf{j}_\varphi(k) = x$ у φ се налази *унутар опсега јављања* $(i, \forall)$ *квантификатора* $\forall$, ако се x јавља у $\psi_{i,\forall}$ и $\mathsf{j}_\varphi(i+1) = x$. Јављање (x, k) променљиве x је *везано јављањем* $(i, \forall)$ *квантификатора* $\forall$, ако је x унутар опсега од $(i, \forall)$ и не постоји m такво да је $i < m < k$ и x је унутар опсега јављања квантификатора $(m, \forall)$. Јављање променљиве x је *слободно* у φ ако се не налази унутар опсега ма ког јављања квантификатора у φ. За променљиву x кажемо да је *слободна* у φ ако има макар једно слободно јављање у φ. Слично томе, ако је Γ скуп формула, кажемо да се x *јавља слободно* у Γ, ако има макар једно слободно јављање у некој од формула из Γ.

У наставку ћемо да пишемо $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ да бисмо истакли да је φ формула чије су слободне променљиве међу $x_1, \ldots, x_n$. Такође претпостављамо да су у том случају све ове променљиве различите. Слично ономе што смо имали за терме, не захтевамо да се све променљиве $x_1, \ldots, x_n$ заиста слободне у φ, већ само да нема других променљивих осим ових које су слободне у φ. Скуп свих слободних променљивих формуле φ ћемо да означавамо са $\mathsf{FV}(\varphi)$.

Задатак 4.3. *Дајте рекурзивну дефиницију скупа* $\mathsf{FV}(\varphi)$.

Дефиниција 4.6. Терме у којима нема јављања променљивих зваћемо *затвореним* термима. Формуле у којима је свако јављање променљивих везано зовемо *реченицама*.

Грубо говорећи, формуле $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ представљају тврђења о објектима на које $x_1, \ldots, x_n$ реферирају. Што се реченица тиче, међутим, њихову истиносну вредност можемо да утврдимо независно од тога на шта се одређене променљиве односе. Још увек нисмо званично приписали никакво значење формулама нашег језика, то ћемо да урадимо нешто касније. За сада, оне остају чисто синтактички објекти.

У наставку ћемо понекад да користимо заграде и запете приликом писања терама, да бисмо олакшали читљивост. Тако ћемо место $\mathsf{f}t_1 \ldots t_m$ понекад да пишемо било $\mathsf{f}(t_1 \ldots t_m)$, било са запетама $\mathsf{f}(t_1, \ldots, t_m)$. Посебно, ако је f бинарни функцијски симбол, писаћемо, као што је обичај, $(t_1 \mathsf{f} t_2)$ место $\mathsf{f}t_1t_2$. Треба, међутим, да имамо у виду да запете нису међу симболима алфабета нашег језика. Из истог разлога, понекад ћемо да користимо запете и заграде при писању атомских формула $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$. Такође, место $= t_1t_2$ ћемо писати $(t_1 = t_2)$, и слично ћемо да чинимо у случају других бинарних релацијских симбола. Осим тога, $t_1 \neq t_2$ ћемо користити као скраћеницу за $(\neg(t_1 = t_2))$, тј. $(\neg = t_1t_2)$.

Рецимо, формулу из Примера 4.3 одозго:

$$((\forall \mathsf{v}_2 = * \mathsf{v}_2 \mathsf{v}_1 \mathbf{e}) \rightarrow = \mathsf{v}_2 \mathbf{e}),$$

можемо да запишемо на следећи начин, који је читљивији:

$$((\forall \mathsf{v}_2((\mathsf{v}_2 * \mathsf{v}_1) = \mathbf{e})) \rightarrow (\mathsf{v}_2 = \mathbf{e}))$$

Везнике $\wedge, \vee$, $\top$, $\perp$ и $\leftrightarrow$ смо већ дефинисали и те ћемо дефиниције да задржимо и у језику логике првог реда. Овде ћемо само још да дамо дефиницију егзистенцијалног квантификатора $\exists$. Израз са леве стране, дакле, користићемо као скраћеницу одговарајућег израза здесна:

$(\exists x \varphi)$	$(\neg(\forall x(\neg \varphi)))$

На спољашњим заградама у формулама ћемо опет да штедимо, као и раније. Такође, нећемо да пишемо заграде око негација, нити око универзално и егзистенцијално квантификованих формула. Претпостављамо, као што се то иначе чини, да је опсег негације, универзалног и егзистенцијалног квантификатора најужи могући. Другим речима:

$$\begin{array}{lll} \neg\varphi \rightarrow \psi \quad \text{је} & ((\neg\varphi) \rightarrow \psi), & \text{а не} \quad (\neg(\varphi \rightarrow \psi)). \\ \forall x\varphi \vee \psi \quad \text{је} & ((\forall x\varphi) \vee \psi), & \text{а не} \quad (\forall x(\varphi \vee \psi)). \\ \exists x\varphi \wedge \psi \quad \text{је} & ((\exists x\varphi) \wedge \psi), & \text{а не} \quad (\exists x(\varphi \wedge \psi)). \end{array}$$

Такође, ако је φ формула језика $\mathscr{L}$ и $x_1, \ldots, x_n$ су различите променљиве, онда ћемо формуле $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ и $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$ скраћено записивати као $\forall x_1 \ldots x_n \varphi$ и $\exists x_1 \ldots x_n \varphi$, или још краће као $\forall \vec{x} \varphi$ и $\exists \vec{x} \varphi$ ако је из контекста јасно која је дужина вектора $\vec{x}$.

Пример 4.4. Ако је $\mathscr{L}_{ZF}$ језик теорије скупова чији је једини нелогички симбол бинарни предикат $\in$ којим означавамо релацију припадности, онда су једини терми овог језика промењљиве v_i. Једине атомске формуле су оне облика $\mathsf{v}_i \in \mathsf{v}_j$ или $\mathsf{v}_i = \mathsf{v}_j$. Аксиоме теорије скупова, **ZF** или **ZFC**, ће све да буду реченице изражене на овом језику. Пошто теорија скупова заснива читаву математику, све уобичајене математичке теореме могу да се изразе као реченице овога језика.

Пример 4.5. Ако је $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}$ сада језик аритметике, чија је улога да опише структуру $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; <, +, \cdot, S, 0)$, онда је у формули

$$\varphi = (x \neq \mathbf{0} \wedge x \neq \mathbf{S0} \wedge \forall y \forall z (x = y \cdot z \rightarrow (y = \mathbf{S0} \vee z = \mathbf{S0})))$$

промењљива x слободна, и њоме се каже да је x прост број. Са друге стране, реченица

$$\psi = \forall x \exists y \exists z (x < y \wedge \varphi(y) \wedge \varphi(z) \wedge z = \mathbf{SS}y)$$

изражава *Хипотезу о простим близанцима.*

5. Структуре језика првог реда

Да бисмо мотивисали увођење језика првог реда, говорили смо о појму релацијско-операцијске структуре. У овом одељку ћемо тај појам прецизно да дефинишемо да бисмо могли да говоримо о семантици тих језика.

Релацијско-операцијске структуре. Нека је $\mathscr{L}$ језик првог реда. Следећа дефиниција прецизира појам релацијско-операцијске структуре о којем смо говорили у претходном одељку.

Дефиниција 5.1. *Релацијско-операцијска структура* $\mathfrak{A}$ језика $\mathscr{L}$ је једна четворка

$$\mathfrak{A} = (A; (\mathsf{R}^{\mathfrak{A}})_{\mathsf{R}\in\mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}}, (\mathsf{f}^{\mathfrak{A}})_{\mathsf{f}\in\mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}}, (\mathsf{c}^{\mathfrak{A}})_{\mathsf{c}\in\mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}})$$

коју чине:

(1) непразан скуп A, који зовемо *доменом* или *универзумом* структуре $\mathfrak{A}$;
(2) за сваки $n-$арни симбол $\mathsf{R} \in \mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}$, једна $n-$арна релација $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$, *интерпретација* симбола R у структури $\mathfrak{A}$;
(3) за сваки $n-$арни симбол $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$, једна $n-$арна операција $\mathsf{f}^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$, *интерпретација* симбола f у структури $\mathfrak{A}$;
(4) за сваку индивидуалну константу $\mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}$, један истакнути елемент $\mathsf{c}^{\mathfrak{A}}$ скупа A, *интерпретација* симбола c у структури $\mathfrak{A}$.

Дакле, релацијско-операцијска структура (или краће *структура* или *модел*) језика $\mathscr{L}$ нам дају један домен објеката A као и интерпретацију нелогичких симбола језика $\mathscr{L}$. Структуре можемо да разумемо као веома опште математичке објекте и само неке од примера таквих објеката смо дали у претходном одељку. Касније ће бити прилике да се упознамо са још некима од њих.

Као што може да се наслути из последњег примера у претходном одељку, структура ће бити довољна да се утврди истиносна вредност произвољне реченице језика те структуре. Међутим, за оне формуле $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ које нису реченице то неће бити довољно. Рецимо, формула $x_i < \mathbf{SSS0}$ језика $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}$ није исказ, она нема истиносну вредност, као што је нема ни израз *Она је паметна.* Да бисмо могли да говоримо о истиносној вредности, у првом случају морамо да доделимо неку вредност променљивој x_i из домена $\mathbb{N}$. И у другом случају треба да урадимо нешто слично - треба да објаснимо контекст и да кажемо на кога се реч *она* односи, на коју особу, животињу или нешто треће.

Да бисмо то учинили, фиксирајмо један језик $\mathscr{L}$ и структуру тог језика $\mathfrak{A}$. Посматрајмо пресликавање $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ из скупа индивидуалних промењљивих V у домен наше структуре $\mathfrak{A}$. Ово пресликавање треба да припише вредности промењљивима, где нас посебно занимају вредности оних промењљивих које се јављају слободно у формулама φ нашег језика. Оваква пресликавања $\mathfrak{s}$ ћемо да зовемо *индивидуалним валуацијама.*

Да бисмо могли да дефинишемо семантички појам истине у структури $\mathfrak{A}$ треба, дакле, да дефинишемо истиносну вредност произвољне формуле φ језика $\mathscr{L}$ у структури $\mathfrak{A}$ за индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$. Истиносна вредност реченица нашег језика неће да зависи од индивидуалне валуације, него само од структуре $\mathfrak{A}$. Пре него што дамо дефиницију коју смо малочас споменули, треба претходно да уведемо појам *интерпретације* терама нашег језика првог реда $\mathscr{L}$.

Дефиниција 5.2. Нека је $\mathscr{L}$ језик структуре $\mathfrak{A}$ и нека је $\mathfrak{s}$ једна индивидуална валуација. За сваки терм t језика $\mathscr{L}$, дефинишемо његову *интерпретацију* $\bar{\mathfrak{s}}(t)^{\mathfrak{A}}$ рекурзивно, на следећи начин:

(1) за сваку индивидуалну константу c, $\bar{\mathfrak{s}}(\mathsf{c})^{\mathfrak{A}} = \mathsf{c}^{\mathfrak{A}}$;
(2) за сваку промењљиву x, $\bar{\mathfrak{s}}(x)^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{s}(x)$;
(3) ако је t облика $\mathsf{f}t_1 \ldots t_n$, где је f $n-$арни функцијски симбол и $t_1, \ldots, t_n$ су терми, онда ћемо узети да је $\bar{\mathfrak{s}}(t)^{\mathfrak{A}} = \mathsf{f}^{\mathfrak{A}}(\bar{\mathfrak{s}}(t_1)^{\mathfrak{A}}, \ldots, \bar{\mathfrak{s}}(t_n)^{\mathfrak{A}})$.

Функцију $\bar{\mathfrak{s}}(\ )^{\mathfrak{A}} : \mathscr{T} \to A$, где је $\mathscr{T}$ скуп терама језика $\mathscr{L}$, коју смо управо дефинисали, ћемо у наставку често скраћено записивати као $\bar{\mathfrak{s}}$, ако је јасно о којој је структури $\mathfrak{A}$ реч. Следећа техничка дефиниција ће нам бити потребна да бисмо дефинисали валуацију формула облика $\forall x\psi$.

Дефиниција 5.3. Нека је $\mathfrak{A}$ структура језика $\mathscr{L}$ и нека је $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ једна индивидуална валуација. За промењљиву $x \in \mathsf{V}$ и $a \in A$, дефинишемо индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]$ на следећи начин:

$$\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a](y) = \begin{cases} a & \text{ако је } y = x, \\ \mathfrak{s}(y) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пошто смо дефинисали појам интерпретације терама језика $\mathscr{L}$, можемо да дефинишемо појам валуације формула језика $\mathscr{L}$ која ће свим нашим формулама да припише истиносну вредност у структури $\mathfrak{A}$ за индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$. Та дефиниција изгледа овако:

Дефиниција 5.4. Нека су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{s}$ као и горе. *Валуацију*

$$v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}} : \mathscr{F} \to \{0,1\}$$

дефинишемо рекурзивно, за сваку формулу φ језика $\mathscr{L}$, на следећи начин:

(1) ако је φ облика $t_1 = t_2$, где су t_1, t_2 терми, онда је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$, ако је $\bar{\mathfrak{s}}(t_1) = \bar{\mathfrak{s}}(t_2)$; иначе је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 0$;
(2) ако је φ облика $\mathsf{R}t_1 \ldots t_n$, где је R један $n-$арни релацијски симбол и $t_1, \ldots, t_n$ су терми, онда је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$, ако је $(\bar{\mathfrak{s}}(t_1), \ldots, \bar{\mathfrak{s}}(t_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}$; иначе је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 0$;
(3) ако је φ облика $\neg\psi$, онда је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$, ако је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\psi) = 0$; иначе је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 0$;
(4) ако је φ облика $\psi \to \sigma$, онда је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$, ако је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\psi) = 0$ или $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = 1$; иначе је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 0$;
(5) ако је φ облика $\forall x \psi$, онда је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$, ако за свако $a \in A$ имамо да важи $v_{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]}^{\mathfrak{A}}(\psi) = 1$; иначе је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 0$.

Кажемо да је формула φ *истинита* или *задовољива* у структури $\mathfrak{A}$ за индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$ ако је $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$. То ћемо такође да записујемо као $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi$. Ако је, пак, $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 0$, то ћемо записивати као $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \varphi$.

Напомена. Није тешко видети како би требало да изгледају ставке претходне дефиниције које би се тицале дефинисаних логичких симбола наших језика. За то ћемо да се послужимо нотацијом из претходног пасуса:

$$\begin{array}{lcl}
(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi \wedge \sigma & \Leftrightarrow & (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi \text{ и } (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \sigma \\
(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi \vee \sigma & \Leftrightarrow & (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi \text{ или } (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \sigma \\
(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi \leftrightarrow \sigma & \Leftrightarrow & (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi \text{ акко } (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \sigma \\
(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \exists x \psi & \Leftrightarrow & \text{постоји } a \in A \text{ и важи } (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \psi.
\end{array}$$

Ево како бисмо могли да проверимо да важи последње од ових тврђења:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \exists x \psi &\Leftrightarrow ((\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \neg \forall x \neg \psi \\
&\Leftrightarrow ((\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \forall x \neg \psi \\
&\Leftrightarrow \text{ постоји } a \in A,\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \not\models \neg \psi \\
&\Leftrightarrow \text{ постоји } a \in A,\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \psi.
\end{aligned}$$

Такође, једноставно је да се провери да важи следеће:

Тврђење 5.1. *За сваку структуру* $\mathfrak{A}$ *језика* $\mathscr{L}$*, формулу* ψ *и индивидуалну валуацију* $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$*:*

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\psi \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \neg\exists x\neg\psi.$$

Доказ.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\psi &\Leftrightarrow \text{ за свако } a \in A,\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \psi \\ &\Leftrightarrow \text{ за свако } a \in A,\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \not\models \neg\psi \\ &\Leftrightarrow \text{ не постоји } a \in A,\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \neg\psi \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \exists x\neg\psi \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \neg\exists x\neg\psi.\end{aligned}$$

$\dashv$

У исказној логици смо имали да вредност валуације неке исказне формуле зависи само од вредности које та валуација приписује исказним промењивима које се у тој формули јављају. Нешто слично имамо и у логици првог реда.

Лема 5.1. *За сваку структуру* $\mathfrak{A}$ *и формулу* φ*, ако су* $\mathfrak{s}_1$ *и* $\mathfrak{s}_2$ *две индивидуалне валуације такве да важи* $\mathfrak{s}_1(x) = \mathfrak{s}_2(x)$*, за сваку промењиву* x *која се јавља слободно у* φ*, онда важи:*

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_2) \models \varphi.$$

Доказ. Прво ћемо индукцијом по сложености терама да покажемо да, ако се $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}_2$ слажу на свим промењивима у t, онда је $\bar{\mathfrak{s}}_1(t) = \bar{\mathfrak{s}}_2(t)$. Доказ је једноставан, ево како изгледа његов индуктивни корак. Претпоставимо да је $t = \mathsf{f}t_1 \dots t_n$. Све промењиве из t_i, за $1 \leq i \leq n$, јављају се у t, па се $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}_2$ слажу на свим промењивима из терама t_i. На основу индуктивне хипотезе имамо да је $\bar{\mathfrak{s}}_1(t_i) = \bar{\mathfrak{s}}_2(t_i)$ за свако $1 \leq i \leq n$. Дакле,

$$\bar{\mathfrak{s}}_1(t) = \mathsf{f}^{\mathfrak{A}}(\bar{\mathfrak{s}}_1(t_1), \dots, \bar{\mathfrak{s}}_1(t_n)) = \mathsf{f}^{\mathfrak{A}}(\bar{\mathfrak{s}}_2(t_1), \dots, \bar{\mathfrak{s}}_2(t_n)) = \bar{\mathfrak{s}}_2(t).$$

Вратимо се сада тврђењу, које доказујемо индукцијом по сложености формуле φ. Претпоставимо прво да је φ атомска формула, рецимо $\varphi = \mathsf{R}t_1 \dots t_n$. Све промењиве из терама t_i, за $1 \leq i \leq n$, јављају се слободно у φ. Дакле, $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}_2$ се слажу на свим промењивима из φ. На основу онога што смо малопре показали, $\bar{\mathfrak{s}}_1(t_i) = \bar{\mathfrak{s}}_2(t_i)$. Међутим, онда имамо да је

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1) \models \varphi &\Leftrightarrow (\bar{\mathfrak{s}}_1(t_1), \dots, \bar{\mathfrak{s}}_1(t_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \\ &\Leftrightarrow (\bar{\mathfrak{s}}_2(t_1), \dots, \bar{\mathfrak{s}}_2(t_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_2) \models \varphi.\end{aligned}$$

Узмимо сада да је $\varphi = \psi \rightarrow \sigma$. Случај када је формула φ облика негације се слично доказује. Променљиве које се јављају слободно у формули φ су оне које се јављају слободно у ψ заједно са свим променљивима које се јављају слободно у σ. Дакле, $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}_2$ се слажу на свим таквим променљивима из ψ и σ. На основу индуктивне хипотезе имамо $v^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{s}_1}(\psi) = 1 \Leftrightarrow v^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{s}_2}(\psi) = 1$, и слично томе за формулу σ. Дакле,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1) \models \varphi &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1) \not\models \psi \text{ или } (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1) \models \sigma \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_2) \not\models \psi \text{ или } (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_2) \models \sigma \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_2) \models \varphi.\end{aligned}$$

На крају, узмимо случај када је $\varphi = \forall x \psi$. Све слободне променљиве из ψ јављају се слободно и у φ, осим можда променљиве x (ако се x јавља слободно у ψ). Дакле, $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}_2$ се слажу на свим променљивима у ψ осим можда на x. Имамо да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1) \models \varphi$ ако и само ако за свако $a \in A$ имамо да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1[x \rightsquigarrow a]) \models \psi$. Приметимо сада да се $\mathfrak{s}_1[x \rightsquigarrow a]$ и $\mathfrak{s}_2[x \rightsquigarrow a]$ слажу на x као и на свим другим променљивима које се јављају слободно у φ. На основу индуктивне хипотезе имамо да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1[x \rightsquigarrow a]) \models \psi$ ако и само ако $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_2[x \rightsquigarrow a]) \models \psi$, за свако $a \in A$. Дакле,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1) \models \varphi &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1[x \rightsquigarrow a]) \models \psi, \text{ за свако } a \in A \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_2[x \rightsquigarrow a]) \models \psi, \text{ за свако } a \in A \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_2) \models \varphi.\end{aligned}$$

$\dashv$

Ослањајући се на претходну лему можемо да дамо следећу дефиницију која се, између осталог, тиче истиносне вредности реченица нашег језика:

Дефиниција 5.5. Ако је σ реченица језика $\mathscr{L}$, онда дефинишемо $v^{\mathfrak{A}}(\sigma)$ на следећи начин:

$$v^{\mathfrak{A}}(\sigma) = v^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{s}}(\sigma)$$

где је $\mathfrak{s}$ произвољна индивидуална валуација. За реченицу σ кажемо да је *истинита* у $\mathfrak{A}$ ако је $v^{\mathfrak{A}}(\sigma) = 1$. То ћемо такође да записујемо као $\mathfrak{A} \models \sigma$.

За скуп формула Γ кажемо да је *истинит* или *задовољив у* $\mathfrak{A}$ *за индивидуалну валуацију* $\mathfrak{s}$, ако су све формуле из Γ истините у $\mathfrak{A}$ за $\mathfrak{s}$. Ако је Σ скуп реченица, онда кажемо да је Σ *истинит* у $\mathfrak{A}$ ако су све реченице из Σ истините у $\mathfrak{A}$.

Ваљане формуле и појам семантичке последице. Сада можемо да уведемо појам семантичке последице у логици првог реда.

Дефиниција 5.6. Нека је Γ скуп формула језика првог реда $\mathscr{L}$ и нека је φ формула. Пишемо $\Gamma \models \varphi$ и кажемо да је формула φ *семантичка последица од* Γ ако за сваку структуру $\mathfrak{A}$ језика $\mathscr{L}$ и сваку индивидуалну валуацију $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ важи, ако је Γ истинит у $\mathfrak{A}$ за $\mathfrak{s}$, онда је φ истинита у $\mathfrak{A}$ за $\mathfrak{s}$.

За формулу φ кажемо да је *ваљана* ако је истинита у свакој структури $\mathfrak{A}$ за сваку индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$. Слично ћемо говорити и када се ради о скуповима формула. Формула φ је *задовољива* ако је истинита у некој структури $\mathfrak{A}$ за неку индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$. Слично томе, скуп формула Γ је *задовољив* ако је истинит у некој структури $\mathfrak{A}$ за неку индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$. Формула φ је ваљана ако и само ако важи $\emptyset \models \varphi$. Да је $\emptyset \models \varphi$, тј. да је формула φ ваљана, ћемо скраћено да записујемо овако $\models \varphi$. Слично као и у случају исказне логике, ако будемо желели да кажемо да нека формула φ није ваљана, односно да није семантичка последица неког скупа формула Γ, онда ћемо то да записујемо као $\not\models \varphi$, односно као $\Gamma \not\models \varphi$. Ако је Γ синглтон, рецимо $\Gamma = \{\varphi\}$, онда ћемо место $\{\varphi\} \models \psi$ да пишемо $\varphi \models \psi$.

За формуле φ и ψ кажемо да су *логички еквивалентне*, што записујемо као $\varphi \sim \psi$, ако је свака од њих семантичка последица оне друге, тј. $\varphi \models \psi$ и $\psi \models \varphi$.

Задатак 5.1. *Докажите да је* $\sim$ *релација еквиваленције на скупу формула* $\mathscr{F}$ *језика* $\mathscr{L}$*.*

Сада ћемо да покажемо да су таутологије, логичке истине исказне логике, задржане и у контексту логике првог реда.

Дефиниција 5.7. Кажемо да је формула φ језика првог реда $\mathscr{L}$ *инстанца* исказне формуле ψ, ако се у ψ јављају само исказна слова $q_1, \ldots, q_n$ и постоје формуле $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ језика $\mathscr{L}$ такве да φ настаје као резултат замене формуле φ_i место сваког јављања од q_i унутар формуле ψ, за $1 \leq i \leq n$.

Пример 5.1. Формула

$$\forall x\varphi \to (\exists y\varphi \to \forall x\varphi)$$

је инстанца исказне формуле $p_1 \to (p_2 \to p_1)$. Такође, формула

$$(\forall x\forall y\varphi \wedge \exists z\forall v\sigma) \to (\forall x\forall y\varphi \vee \exists z\forall v\sigma)$$

је инстанца исказне формуле $(p_7 \wedge p_{17}) \rightarrow (p_7 \vee p_{17})$. Формуле језика првог реда које настају на овај начин, као инстанце исказних формула које су таутологије зову се *таутолошким инстанцама.*

Тврђење 5.2. *Свака таутолошка инстанца је ваљана формула.*

Доказ. Узмимо да је формула φ језика $\mathscr{L}$ инстанца исказне формуле φ' у којој место исказних слова $q_1, \ldots, q_n$ сада имамо формуле $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ језика $\mathscr{L}$. Узмимо да је $\mathfrak{A}$ структура језика $\mathscr{L}$ и $\mathfrak{s}$ индивидуална валуација. Основну валуацију v_b дефинишемо на следећи начин:

$$v_b(q_i) = \begin{cases} 1, \text{ ако је } (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi_i, \\ 0, \text{ ако је } (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \varphi_i. \end{cases}$$

Вредности које ова основна валуација приписује словима која се у φ' не јављају нам нису важне. Сада ћемо, индукцијом по сложености формуле φ', да покажемо да важи:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \Leftrightarrow v(\varphi') = 1. \tag{$*$}$$

Ако је φ' неко исказно слово q_i, онда имамо да је

$$v(q_i) = 1 \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi$$

на основу дефиниције од v_b.

Ако је φ' облика $\neg\psi'$, приметимо да ће у том случају φ бити облика $\neg\psi$, за неку формулу ψ језика $\mathscr{L}$. Онда ће да важи:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \psi \\ &\Leftrightarrow v(\psi') = 0 \\ &\Leftrightarrow v(\varphi') = 1. \end{aligned}$$

Са првог на други ред горе можемо да пређемо на основу индуктивне хипотезе за формулу ψ'.

Ако је φ' облика $\psi' \rightarrow \sigma'$, приметимо поново да ће φ бити облика $\psi \rightarrow \sigma$, за неке формуле ψ и σ. Слично као и претходном случају, имамо да важи:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi \Rightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \sigma \\ &\Leftrightarrow v(\psi') = 1 \Rightarrow v(\sigma') = 1 \\ &\Leftrightarrow v(\varphi') = 1. \end{aligned}$$

Поново смо са првог на други ред горе могли да пређемо захваљујући индуктивној хипотези. Овим смо показали да важи $(*)$ и можемо да се вратимо доказу нашег тврђења.

Ако је наша изворна формула φ таутолошка инстанца од φ', али постоје $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{s}$ такви да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \varphi$, тј. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \neg\varphi$, онда бисмо имали, на основу конструкције горе, да важи $v(\varphi') = 0$. Међутим, то је немогуће пошто је формула φ' таутологија. $\dashv$

Већ смо напоменули да је питање да ли је нека формула таутологија одлучиво. Постоје ефективне процедуре, као што су истиносне таблице, које нам после коначно много корака за сваку исказну формулу дају одговор на питање да ли је она таутологија или није. Када би свака ваљања формула, логичка истина логике првог реда, била таутолошка инстанца могли бисмо да очекујемо да ће и сада таква једна процедура да нам буде на располагању. Међутим, далеко од тога да ће то бити случај. Као што ћемо видети у другом делу ове књиге, логика првог реда *није одлучива*. За сада, погледајмо како изгледају неке ваљање формуле које нису таутолошке инстанце.

У Табели 1 доле навели смо неке важне парове логички еквивалентних формула. Еквиваленције у првом реду те табеле обично се зову *Де Моргановим законима*, оне у другом реду се тичу пермутовања квантификатора истог типа док су еквиваленције из трећег реда *закони дистрибутивности* $\forall$ над $\wedge$ и $\exists$ над $\vee$. Важно је да знамо да еквиваленције од четвртог па све до последњег реда у табели не важе безусловно – оне ће важити под условом да $x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$. Еквиваленције из последња три реда табеле обично се зову *правилима пасажа*.

Примера ради, погледајмо како бисмо могли да покажемо да су формуле из друге колоне петог реда табеле логички еквивалентне. Остале се еквиваленције доказују сасвим слично и остављамо их читаоцу за вежбу.

Узмимо, дакле, да је $\mathfrak{A}$ структура и $\mathfrak{s}$ индивидуална валуација. Претпоставимо да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \exists x(\varphi \wedge \psi)$ и да се променљива x не јавља слободно у формули φ. На основу Напомене која следи нашу Дефиницију 5.4 одозго, знамо да када је то случај, онда постоји неко $a \in A$ такво да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi \wedge \psi$. Из тога ће онда да следи да имамо $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$ као и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \psi$. Из другог конјункта последње реченице можемо да закључимо да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \exists x\psi$, док из првог конјункта следи да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi$ – то је зато што се променљива x не јавља слободно у формули φ (в. Лему 5.1). Дакле, можемо да закључимо да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \wedge \exists x\psi$.

У супротном смеру, претпоставимо да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \wedge \exists x\psi$. Дакле, имамо да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi$ као и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \exists x\psi$. Поново, из другог конјункта последње реченице следи да постоји неко $a \in A$

$\neg\exists x\varphi \sim \forall x\neg\varphi$	$\neg\forall x\varphi \sim \exists x\neg\varphi$	
$\forall x\forall y\varphi \sim \forall y\forall x\varphi$	$\exists x\exists y\varphi \sim \exists y\exists x\varphi$	
$\forall x(\varphi \wedge \psi) \sim \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$	$\exists x(\varphi \vee \psi) \sim \exists x\varphi \vee \exists x\psi$	
$\varphi \sim \forall x\varphi$	$\varphi \sim \exists x\varphi$	$x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$
$\forall x(\varphi \vee \psi) \sim \varphi \vee \forall x\psi$	$\exists x(\varphi \wedge \psi) \sim \varphi \wedge \exists x\psi$	$x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$
$\forall x(\varphi \to \psi) \sim \varphi \to \forall x\psi$	$\forall x(\psi \to \varphi) \sim \exists x\psi \to \varphi$	$x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$
$\exists x(\varphi \to \psi) \sim \varphi \to \exists x\psi$	$\exists x(\psi \to \varphi) \sim \forall x\psi \to \varphi$	$x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$

Табела 2. Логички еквивалентне формуле

такво да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \psi$, док из првог конјункта следи да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$ – опет, пошто се $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]$ слажу на свим променљивима које се јављају слободно у φ. Дакле, имамо да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi \wedge \psi$, па је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Тврђење 5.3. *За произвољне скупове формула Γ и Δ, као и формуле φ и ψ, важи следеће:*

$$\varphi \sim \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi \leftrightarrow \psi;$$
$$\varphi \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi \to \psi.$$

Такође, ако је $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \models \varphi$, онда $\Delta \models \varphi$.

Доказ. Прве две еквиваленције су једноставна последица Дефиниције 5.6 коју смо малопре дали. Треће је тврђење такође сасвим једноставно доказати, јер ако су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{s}$ такви да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \Delta$, онда имамо и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \Gamma$, пошто је $\Gamma \subseteq \Delta$, па и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi$. $\dashv$

Као уопштење друге еквиваленције из претходног тврђења имамо следеће:

Тврђење 5.4. *Нека је Γ скуп формула и φ и ψ формуле. Онда важи:*

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi \to \psi.$$

Доказ. С лева на десно, претпоставимо да је $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ и да су $\mathfrak{A}$ структура и $\mathfrak{s}$ индивидуална валуација такве да задовољавају Γ. Онда ћемо имати да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \varphi$ или пак $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi$. У првом случају, само на основу Дефиниције 5.4 горе имаћемо да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \to \psi$, па ћемо имати $\Gamma \models \varphi \to \psi$. У другом случају, пошто по претпоставци важи $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$, следи да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi$, па опет имамо да је $\Gamma \models \varphi \to \psi$.

Здесна на лево, претпоставимо да је $\Gamma \models \varphi \to \psi$ и да су $\mathfrak{A}$ структура и $\mathfrak{s}$ индивидуална валуација које задовољавају $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Претпоставимо да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \psi$. Пошто $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \Gamma$ и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi$, следи да $\Gamma \not\models \varphi \to \psi$, што је супротно нашој претпоставци. Дакле, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi$, па имамо да је $\Gamma \models \varphi \to \psi$. $\dashv$

Тврђење 5.5. *За произвољан скуп формула Γ, као и формуле $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ и $1 \leq i \leq n$, следећа су тврђења еквивалентна:*

(1) $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$;
(2) $\Gamma \cup \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \models \psi$;
(3) $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}\} \models (\varphi_i \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$.

Доказ. Да бисмо доказали да (1) повлачи (2), треба само да приметимо да, ако су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{s}$ такве да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, онда $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi_i$ за свако $1 \leq i \leq n$. Важи и импликација у обрнутом смеру, па ако $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}\}$, онда $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{i-1}$, из чега следи да (2) повлачи (3). На сличан начин показујемо да (3) повлачи (1). $\dashv$

Тврђење 5.6. *Нека су φ и ψ произвољне формуле. Онда важи:*

(1) $\{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \models \forall x\psi$,
(2) $\models \varphi \Leftrightarrow \models \forall x\varphi$.

Доказ. Да бисмо доказали прво од ових тврђења, узмимо да су нам дати $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{s}$ такви да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x(\varphi \to \psi)$ као и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\varphi$. Узмимо сада произвољно $a \in A$. Онда ћемо имати да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi \to \psi$ и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$. Дакле, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \psi$, а пошто је $a \in A$ било произвољно, следи да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\psi$.

Друго је тврђење такође једноставно доказати. Претпоставимо да је формула φ ваљана, тј. $\models \varphi$. Нека су нам дати структура $\mathfrak{A}$ и индивидуална валуација $\mathfrak{s}$, као и произвољно $a \in A$. Онда ћемо, пошто је формула φ ваљана, имати да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$. Дакле, следи да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\varphi$, па је и формула $\forall x\varphi$ ваљана.

У супротном смеру, претпоставимо да је $\models \forall x\varphi$ и да су нам дати структура $\mathfrak{A}$ и индивидуална валуација $\mathfrak{s}$. Онда ће да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\varphi$. Посебно ћемо имати да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \mathfrak{s}(x)]) \models \varphi$. Међутим, како је $\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \mathfrak{s}(x)] = \mathfrak{s}$, следи да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi$, па је формула φ ваљана. $\dashv$

Дефиниција 5.8. Кажемо да је формула φ *генерализација* формуле ψ, ако за неко $n \geq 0$ и променљиве $x_1, \ldots, x_n$ имамо да је

$$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi.$$

Дакле, у случају да је $n = 0$, можемо да кажемо да је свака формула сопствена генерализација.

Напомена. Приметимо само да на основу тврђења које смо управо доказали следи да ако је формула ψ ваљана и φ је генерализација од ψ, онда је и формула φ такође ваљана.

Тврђење 5.7. *За сваки скуп формула* Γ *и формулу* φ *важи:*

(1) $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *није задовољив;*

(2) $\Gamma \models \neg\varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\varphi\}$ *није задовољив;*

(3) ако је Γ *задовољив, онда је макар један од скупова* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *и* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *задовољив.*

Доказ. Тврђења (1) и (2) се једноставно доказују. Да бисмо доказали да важи (3), претпоставимо да је Γ задовољив као и да ниједан од скупова $\Gamma \cup \{\varphi\}$ и $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ није задовољив. На основу (1) и (2) имамо да $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$, а пошто је Γ задовољив, следи да је и формула $\varphi \wedge \neg\varphi$ задовољива, што је немогуће. $\dashv$

Задатак 5.2. *Докажите да важи (1) и (2) из претходног тврђења.*

Теорије. У наставку ће нас посебно занимати реченице наших језика као и скупови реченица. У том случају индивидуалне валуације не играју никакву улогу, као што смо већ видели горе, па кажемо да је реченица σ семантичка последица скупа реченица Σ ако и само ако, за сваку структуру $\mathfrak{A}$ важи да, ако је Σ истинито у $\mathfrak{A}$, онда је и σ истинито у $\mathfrak{A}$. Скупове реченица ћемо често звати и *теоријама*. За скуп реченица Σ језика $\mathscr{L}$ ћемо рећи да је *потпун*, ако за сваку реченицу σ тог језика имамо да $\sigma \in \Sigma$ или $\neg\sigma \in \Sigma$. Та ће нам особина скупова реченица бити посебно занимљива касније. За сада, приметимо само да смо у доказу *Теореме потпуности* (3.6) исказне логике конструисали максимално конзистентан скуп који је имао ово својство. Слично ће бити и у доказу потпуности логике првог реда, само што ћемо се тамо срести са једним појмом који својство потпуности које смо управо дефинисали уопштава.

Пример 5.2. Ако је $\mathscr{L}_G$ језик теорије група, нека је Σ следећи скуп реченица:

(1) $\forall xyz(x * (y * z) = (x * y) * z)$;

(2) $\forall x(x * \mathbf{e} = x = \mathbf{e} * x)$;

(3) $\forall x \exists y(x * y = \mathbf{e} = y * x)$.

Скуп Σ је уобичајен скуп аксиома теорије група, као што смо то већ напоменули раније. Ако је σ реченица језика теорије група, онда $\Sigma \models \sigma$, ако σ важи у свим групама. Ако је, на пример, $\sigma = \forall xy(x * y = y * x)$, онда $\Sigma \not\models \sigma$ јер није свака група комутативна.

Пример 5.3. За свако $n \geq 2$, нека је $\sigma_{\geq n}$ следећа реченица:

$$\exists x_1 \dots x_n (x_1 \neq x_2 \wedge \dots \wedge x_1 \neq x_n \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \neq x_n).$$

Нешто друкчије, исту ову реченицу можемо да запишемо и на следећи начин:

$$\exists x_1 \dots x_n (\bigwedge_{0<i<j\leq n} x_i \neq x_j).$$

Узмимо још да је $\sigma_{\geq 1}$ (ваљана) реченица $\exists x(x = x)$. Приметимо да важи:

$$\mathfrak{A} \models \sigma_{\geq n} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ има најмање } n \text{ елемената.}$$

Нека је, за свако $n \geq 1$, $\sigma_{\leq n}$ реченица $\neg\sigma_{\geq n+1}$. Такође, нека је $\sigma_{=n}$ реченица $\sigma_{\geq n} \wedge \sigma_{\leq n}$. Онда ће важити следеће:

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{A} \models \sigma_{\leq n} & \Leftrightarrow & A \text{ има највише } n \text{ елемената} \\ \mathfrak{A} \models \sigma_{=n} & \Leftrightarrow & A \text{ има тачно } n \text{ елемената.} \end{array}$$

Посматрајмо следећи скуп реченица:

$$\Sigma = \{\sigma_{\geq 1}, \sigma_{\geq 2}, \sigma_{\geq 3}, \dots\}.$$

Имамо да важи да је $\mathfrak{A} \models \Sigma$ ако и само ако је скуп A бесконачан. Видећемо нешто касније да не постоји скуп реченица Σ, било ког језика првог реда, такав да је $\mathfrak{A} \models \Sigma$ ако и само ако је скуп A коначан.

Пример 5.4. Нека је $\mathscr{L}_{<} = \{<\}$ и нека је Σ следећи скуп реченица:

(1) $\forall x \neg(x < x)$;
(2) $\forall xyz((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$;
(3) $\forall xy((x < y) \vee (x = y) \vee (y < x))$.

Реченице из у Σ нам кажу да је $<$ строго линеарно уређење. Постоје модели од Σ (структуре $\mathfrak{A}$ у којима је Σ истинито) који су коначни, а постоје и они који су бесконачни; примера ради, скуп $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ са уобичајеним уређењем с једне, и скуп $\mathbb{N}$ са уобичајеним уређењем са друге стране. Међутим, ако узмемо да је

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{\forall x \exists y (x < y)\},$$

ова придодата реченица тврди да не постоји највећи елемент, па сваки модел од Σ' мора да буде бесконачан.

Посматрајмо следеће две реченице:

(4) $\forall xy(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$;
(5) $\forall x \exists yz(y < x \wedge x < z)$.

Све скупа реченице (1)-(5) представљају аксиоме теорије *густих линеарних уређења без крајњих тачака*. О тој теорији ћемо мало више имати да кажемо у последњем одељку ове књиге.

Дефиниција 5.9. Нека је $\mathscr{L}$ језик првог реда и Σ скуп реченица овог језика. Са $\mathsf{Mod}(\Sigma)$ ћемо да означавамо класу свих структура $\mathfrak{A}$ језика $\mathscr{L}$ таквих да важи $\mathfrak{A} \models \sigma$, за свако $\sigma \in \Sigma$:

$$\mathsf{Mod}(\Sigma) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models \sigma \text{ за свако } \sigma \in \Sigma\}.$$

Ако је $\Sigma = \{\sigma\}$ синглтон, писаћемо $\mathsf{Mod}(\sigma)$ место $\mathsf{Mod}(\{\sigma\})$.

Узмимо сада да је $\mathscr{K}$ класа структура језика $\mathscr{L}$. Кажемо да је $\mathscr{K}$ *елементарна класа*, ако постоји скуп реченица Σ језика $\mathscr{L}$ такав да је $\mathscr{K} = \mathsf{Mod}(\Sigma)$.

За сваку класу $\mathscr{K}$ структура језика $\mathscr{L}$, узмимо да је $\mathsf{Th}(\mathscr{K})$, *елементарна теорија од* $\mathscr{K}$, дефинисана на следећи начин:

$$\mathsf{Th}(\mathscr{K}) = \{\sigma \mid \mathfrak{A} \models \sigma \text{ за свако } \mathfrak{A} \in \mathscr{K}\}.$$

Ако је $\mathscr{K} = \{\mathfrak{A}\}$, онда ћемо писати $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$, место $\mathsf{Th}(\{\mathfrak{A}\})$. За елементарну теорију $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ кажемо још да је *теорија структуре* $\mathfrak{A}$.

Једна елементарна теорија која ће нам у наставку бити посебно важна је теорија структуре $\mathfrak{N}$:

$$\mathsf{Th}(\mathfrak{N}) = \{\sigma \mid \mathfrak{N} \models \sigma\},$$

тј. скуп свих реченица језика $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}$ истинитих у структури $\mathfrak{N}$.

Као илустрацију појма елементарне класе, можемо да се послужимо примерима које смо дали раније. Тако ћемо у примерима 5.2 и 5.4, имати да је $\mathsf{Mod}(\Sigma)$ класа свих група у првом, и класа свих строгих линеарних уређења у другом случају. Осим тога, јасно је да је класа парцијалних уређења елементарна и слично важи за класу релација еквиваленције $\mathsf{Mod}(\Sigma)$, где је Σ следећи скуп реченица:

(1) $\forall x \mathsf{R}xx$;
(2) $\forall xy(\mathsf{R}xy \to \mathsf{R}yx)$;
(3) $\forall xyz((\mathsf{R}xy \wedge \mathsf{R}yz) \to \mathsf{R}xz)$.

Такође, класа простих неусмерених графова је елементарна. У овом случају бисмо имали да скуп Σ чине следеће две реченице:

(1) $\forall x \neg(\mathsf{R}xx)$;
(2) $\forall xy(\mathsf{R}xy \to \mathsf{R}yx)$.

Ако узмемо скуп $\Sigma = \{\sigma_{\geq n} \mid n \geq 1\}$ из Примера 5.3 одозго, онда видимо да је $\mathsf{Mod}(\Sigma)$, класа бесконачних скупова, елементарна. Међутим, како смо напоменули горе, не постоји скуп реченица Σ'

такав да је $\mathsf{Mod}(\Sigma')$ класа свих коначних скупова. То је последица *Теореме компактности* (10.3) логике првог реда коју ћемо да докажемо нешто касније. Са друге стране, такође из Примера 5.3 видимо да је класа свих структура кардиналности (најмање, највише, тачно) n, где је $n \geq 1$, елементарна.

6. Основни појмови теорије модела

Када посматрамо неки језик $\mathscr{L}$ и одговарајућу структуру тог језика, треба да имамо на уму о којим објектима (функцијама, релацијама и константама) можемо у том језику да говоримо. Наравно, можемо да говоримо о било којој функцији или релацији за коју у нашем језику имамо одговарајући симбол. Међутим, има и других. Сада ћемо се посветити питању које све објекте дате структуре можемо да дефинишемо служећи се средствима нашег језика.

Дефинабилност. Узмимо да је $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ формула језика $\mathscr{L}$ чије се слободне промењљиве налазе међу $x_1, \ldots, x_n$. Ако је $\mathfrak{A}$ структура језика $\mathscr{L}$ и $a_1, \ldots, a_n$ су елементи домена A, онда ћемо писати $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ као скраћеницу за $v_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$, где је $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ таква да је $\mathfrak{s}(x_i) = a_i$, за $1 \leq i \leq n$.

Дефиниција 6.1. Ако је $\mathfrak{A}$ структура и $n \geq 1$, кажемо да је скуп $B \subseteq A^n$ *дефинабилан* у $\mathfrak{A}$, ако постоји формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ језика $\mathscr{L}$ таква да важи:

$$(b_1, \ldots, b_n) \in B \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n).$$

Функција $f : A^n \to A$ је дефинабилна ако је њен граф

$$\{(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \mid f(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+1}\} \subseteq A^{n+1}$$

дефинабилан. Елемент домена структуре $a \in A$ је дефинабилан, ако је синглтон $\{a\}$ дефинабилан.

Кажемо да је скуп $B \subseteq A^n$ *дефинабилан са параметрима* у $\mathfrak{A}$ ако постоји формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и $a_1, \ldots, a_m \in A$ такви да важи:

$$(b_1, \ldots, b_n) \in B \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_m).$$

Дакле, за скуп $B \subseteq A^n$ кажемо да је дефинабилан у $\mathfrak{A}$ ако можемо да нађемо формулу φ са n слободних промењљивих за коју важи да је истинита у $\mathfrak{A}$ када њеним слободним промењљивим припишемо вредности $n-$торке из B, и која је лажна иначе. Исто важи и за функције и елементе домена структуре.

Што се дефинабилности са параметрима тиче, то интуитивно значи да у формулама можемо да се служимо именима елемената наше структуре $\mathfrak{A}$ да бисмо одређене скупове дефинисали.

Пример 6.1. Нека је $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}; +, \cdot, 0, 1)$ структура природних бројева са уобичајеним операцијама сабирања и множења. Приметимо прво да је скуп $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a < b\}$ дефинабилан у $\mathfrak{A}$

помоћу формуле:

$$\varphi(x,y) = \exists z(z \neq \mathbf{0} \wedge x + z = y).$$

Другим речима, релација $<$ је дефинабилна у $\mathfrak{A}$. Узмимо сада да је $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ је прост број}\}$. Онда формула

$$\psi(x) = x \neq \mathbf{1} \wedge \forall yz(x = y \cdot z \rightarrow (y = \mathbf{1} \vee z = \mathbf{1}))$$

дефинише овај скуп у структури $\mathfrak{A}$.

Посматрајмо сада структуру $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}; <)$ језика $\mathscr{L} = \{\boldsymbol{<}\}$. Приметимо да формула

$$\psi(x) = \neg\exists y(y \boldsymbol{<} x)$$

дефинише 0 у $\mathfrak{A}$. Такође, за свако $n \geq 1$, ћемо имати да је n дефинабилан овој структури, што није тешко да се види (1 је најмањи природан број већи од 0, 2 најмањи природан број већи од 1 итд.).

Нека је сада $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}; +, \cdot)$ структура природних бројева са уобичајеним операцијама сабирања и множења. Онда су 0, S, $<$ и операција степеновања E, сви дефинабилни у структури $\mathfrak{A}$.

Можемо да дефинишемо број 0 помоћу формуле

$$\varphi(x) = \forall y(x + y = y).$$

Већ смо видели како можемо да у овој структури дефинишемо релацију $<$, док формула

$$\sigma(x) = \forall y(x \cdot y = y),$$

дефинише број 1. Из онога што смо раније рекли следи да у овој структури можемо да дефинишемо било који природан број k као и скуп простих бројева $\mathbb{P}$. Такође, било који коначан или ко-коначан скуп (скуп чији је комплемент коначан) биће у овој структури дефинабилан. Да бисмо показали да је операција E дефинабилна у структури $\mathfrak{A}$ треба нешто више посла и то ћемо да покажемо у другом делу ове књиге. Тада ћемо такође да покажемо да је свака израчунљива функција као и релација дефинабилна у овој структури. Приметимо да има само пребројиво много дефинабилних функција и релација, док је скуп свих функција једног аргумента на $\mathbb{N}$ кардиналности $2^{\aleph_0}$.

Пример 6.2. Нека је сада $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}; +, \cdot)$ структура реалних бројева са уобичајеним операцијама сабирања и множења. Јасно је да је 0 дефинабилан у овој структури, пошто је 0 јединствени неутрал за сабирање. Скуп $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ позитивних реалних бројева такође је дефинабилан помоћу формуле

$$\varphi(x) = \exists y (y \cdot y = x) \wedge x \neq \mathbf{0}.$$

Из овога следи да је уобичајено линеарно уређење $<$ на $\mathbb{R}$ дефинабилно у $\mathfrak{A}$:

$$\psi(x, y) = \exists z (\varphi(z) \wedge x + z = y).$$

Пример 6.3. Примери дефинабилности које смо горе дали врло су једноставни. Понекад, међутим, није сасвим једноставно видети да је неки скуп дефинабилан у датој структури. Узмимо, примера ради, структуру $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}; +, \cdot)$ целих бројева са уобичајеним операцијама сабирања и множења. Скуп $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$ је дефинабилан у овој структури помоћу *Лагранжове теореме о четири квадрата* (сваки позитиван цео број може се представити као збир четири квадрата):

$$\varphi(x) = \exists x_1 x_2 x_3 x_4 (x = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3 + x_4 \cdot x_4).$$

Служећи се претходним, можемо да дефинишемо релацију $<$ у структури $\mathfrak{A}$:

$$\psi(x, y) = x \neq y \wedge \exists z (\varphi(z) \wedge x + z = y).$$

Пример 6.4. Још један пример дефинабилности имамо у структури $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}; +, \cdot, 0, 1)$. Резултат Џулије Робинсон каже да је скуп $\mathbb{Z}$ целих бројева дефинабилан у $\mathfrak{A}$, али то нећемо овде доказивати.

Хомоморфизми. Сада ћемо, служећи се појмовима које смо раније увели да кажемо неколико речи о алгебарском појму хомоморфизма. Интуитивно говорећи, хомоморфизми су пресликавања која чувају структуру.

Нека је $\mathfrak{A}$ структура језика $\mathscr{L}$ и нека је B непразан подскуп од A такав да је $\mathsf{f}^{\mathfrak{A}}[B^n] \subseteq B$ за свако $n \geq 0$ и $n-$арни функцијски симбол $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$. Другим речима, скуп B је затворен за интерпретације свих функцијских симбола језика $\mathscr{L}$. Такође, нека је $\{\mathsf{c}^{\mathfrak{A}} \mid \mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}\} \subseteq B$. Онда је B домен структуре $\mathfrak{B}$ језика $\mathscr{L}$ коју дефинишемо на следећи начин:

$\mathsf{R}^{\mathfrak{B}} \;=_{def}\; \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \cap B^n$, за сваки $n-$арни $\mathsf{R} \in \mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}$;
$\mathsf{f}^{\mathfrak{B}} \;=_{def}\; \mathsf{f}^{\mathfrak{A}} \restriction B^n : B^n \to B$, за сваки $n-$арни $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$;
$\mathsf{c}^{\mathfrak{B}} \;=_{def}\; \mathsf{c}^{\mathfrak{A}}$, за сваки $\mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}$.

За структуру $\mathfrak{B}$ коју смо горе дефинисали кажемо да је *подструктура* структуре $\mathfrak{A}$, што ћемо да означавамо са $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Понекад ћемо рећи још и да је структура $\mathfrak{A}$ *проширење* структуре $\mathfrak{B}$.

Примера ради, подструктура структуре $(\mathbb{R}; +, -, \cdot, 0, 1)$ језика прстена $\mathscr{L}_R$ је ма који прстен $A \subseteq \mathbb{R}$. Најмања таква подструктура је прстен целих бројева $\mathbb{Z}$. Такође:

(1) $(\mathbb{Z}; +, -, \cdot, 0, 1) \subseteq (\mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1) \subseteq (\mathbb{R}; +, -, \cdot, 0, 1)$;
(2) $(\mathbb{N}; <, +, \cdot, 0, 1) \subseteq (\mathbb{Z}; <, +, -, 0, 1)$.

Дефиниција 6.2. Нека су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ две структуре језика првог реда $\mathscr{L}$. *Хомоморфизам* h из $\mathfrak{A}$ у $\mathfrak{B}$ је пресликавање $h : A \to B$ за које важи:

(1) за сваки $n-$арни релацијски симбол $\mathsf{R} \in \mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}$ и $n-$торку $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$,
$$(a_1, \dots, a_n) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{B}};$$
(2) за сваки $n-$арни функцијски симбол $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$ и $n-$торку $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$,
$$h(\mathsf{f}^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = \mathsf{f}^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n));$$
(3) за сваку индивидуалну константу $\mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}$,
$$h(\mathsf{c}^{\mathfrak{A}}) = \mathsf{c}^{\mathfrak{B}}.$$

Утапање структуре $\mathfrak{A}$ у структуру $\mathfrak{B}$ је хомоморфизам $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ који је инјекција. *Изоморфизам* између $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ је хомоморфизам који је бијекција. *Аутоморфизам* структуре $\mathfrak{A}$ је изоморфизам из $\mathfrak{A}$ у $\mathfrak{A}$.

Ако су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ структуре такве да важи $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, онда је идентичко пресликавање $a \mapsto a$ утапање из $\mathfrak{A}$ у $\mathfrak{B}$. Такође, ако је $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ хомоморфизам, онда је $h[\mathfrak{A}]$ подструктура од $\mathfrak{B}$ чији је домен $h[A]$. Ако је h још и утапање, онда имамо изоморфизам $a \mapsto h(a)$ између структура $\mathfrak{A}$ и $h[\mathfrak{A}]$. Ако су $h_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $h_2 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ хомоморфизми, утапања или изоморфизми, онда је то и њихова композиција $h_2 \circ h_1$. Идентичко пресликавање $i_A : A \to A$ је аутоморфизам од $\mathfrak{A}$, а ако је $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ изоморфизам, онда је то и $h^{-1} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$. Дакле, за структуру $\mathfrak{A}$, аутоморфизми од $\mathfrak{A}$ чине групу $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ са композицијом и јединицом i_A.

Задатак 6.1. *Доказати тврђења из претходног пасуса.*

Пример 6.5. Ако је $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}; +, -, 0)$, онда је $n \mapsto -n$ аутоморфизам од $\mathfrak{A}$. Такође, ако је $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}; <)$ онда је $n \mapsto n+1$ аутоморфизам чији је инверз $n \mapsto n-1$.

Појмове хомоморфизма и аутоморфизма структура можемо да користимо да бисмо показали да неки скупови или функције нису у датој структури дефинабилни. Такви се резултати ослањају на следећу теорему и њене последице:

Теорема 6.1. *Нека су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ структуре језика првог реда $\mathscr{L}$ и нека је $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ индивидуална валуација. Претпоставимо да је $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ изоморфизам. Онда важи:*

(1) за сваки терм t језика $\mathscr{L}$:

$$h(\bar{\mathfrak{s}}(t)) = \overline{h \circ \mathfrak{s}}(t);$$

(2) за сваку формулу φ језика $\mathscr{L}$:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \mathfrak{s}) \models \varphi.$$

Доказ. Приметимо прво да за сваку индивидуалну валуацију $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$, имамо да је $h \circ \mathfrak{s} : \mathsf{V} \to B$ такође индивидуална валуација:

$$h \circ \mathfrak{s}(x) = h(\mathfrak{s}(x)).$$

Прво ћемо индукцијом по сложености терма t да докажемо да важи (1). За променљиву $x \in \mathsf{V}$ ово важи јер:

$$\begin{aligned} h(\bar{\mathfrak{s}}(x)) &= h(\mathfrak{s}(x)) \\ &= h \circ \mathfrak{s}(x) \\ &= \overline{h \circ \mathfrak{s}}(x). \end{aligned}$$

За симболе константи $\mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}$ имамо да је

$$\begin{aligned} h(\bar{\mathfrak{s}}(\mathsf{c})) &= h(\mathsf{c}^{\mathfrak{A}}) \\ &= \mathsf{c}^{\mathfrak{B}} \\ &= \overline{h \circ \mathfrak{s}}(\mathsf{c}). \end{aligned}$$

Са првог на други ред смо у претходном случају могли да пређемо зато што је h хомоморфизам. Да бисмо доказали индуктивни корак, узмимо да је $t = \mathsf{f}t_1 \ldots t_n$. Онда важи:

$$\begin{aligned} h(\bar{\mathfrak{s}}(t)) &= h(f^{\mathfrak{A}}(\bar{\mathfrak{s}}(t_1), \ldots, \bar{\mathfrak{s}}(t_n))) \\ &= f^{\mathfrak{B}}(h(\bar{\mathfrak{s}}(t_1)), \ldots, h(\bar{\mathfrak{s}}(t_n))) \\ &= f^{\mathfrak{B}}(\overline{h \circ \mathfrak{s}}(t_1), \ldots, \overline{h \circ \mathfrak{s}}(t_n)) \\ &= \overline{h \circ \mathfrak{s}}(t). \end{aligned}$$

Сада ћемо да докажемо тврђење (2) индукцијом по сложености формуле φ. Претпоставимо прво да је φ атомско, рецимо $\varphi = \mathsf{R}t_1 \dots t_n$. Онда је:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, s) \models \varphi &\Leftrightarrow (\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \\ &\Leftrightarrow (h(\bar{s}(t_1)), \dots, h(\bar{s}(t_n))) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{B}} \\ &\Leftrightarrow (\overline{h \circ s}(t_1), \dots, \overline{h \circ s}(t_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{B}} \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \varphi.\end{aligned}$$

Приметимо само да са првог на други ред овде можемо да пређемо зато што је h хомоморфизам, док са другог на трећи ред можемо прећи на основу резултата који се тиче терама горе.

Ако је $\varphi = t_1 = t_2$, онда важи:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, s) \models \varphi &\Leftrightarrow \bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2) \\ &\Leftrightarrow h(\bar{s}(t_1)) = h(\bar{s}(t_2)) \\ &\Leftrightarrow \overline{h \circ s}(t_1) = \overline{h \circ s}(t_2) \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \varphi.\end{aligned}$$

Слично као и раније, са првог на други ред можемо да пређемо зато што је h инјекција, док са другог на трећи ред опет можемо прећи на основу резултата који смо раније доказали за терме.

Случајеви у којима је формула φ облика негације или импликације једноставно следе на основу индуктивне хипотезе. Претпоставимо на крају да је $\varphi = \forall x\psi$. Онда је

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\psi &\Leftrightarrow \text{за свако } a \in A,\ (\mathfrak{A}, s[x \rightsquigarrow a]) \models \psi \\ &\Leftrightarrow \text{за свако } a \in A,\ (\mathfrak{B}, h \circ (s[x \rightsquigarrow a])) \models \psi \\ &\Leftrightarrow \text{за свако } a \in A,\ (\mathfrak{B}, (h \circ s)[x \rightsquigarrow h(a)]) \models \psi \\ &\Leftrightarrow \text{за свако } b \in B,\ (\mathfrak{B}, h \circ s[x \rightsquigarrow b]) \models \psi \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \forall x\psi.\end{aligned}$$

Приметимо да са трећег на четврти ред горе можемо да пређемо зато што је h бијекција. $\dashv$

Напомена. Ако анализирамо доказ претходне теореме, можемо да видимо следеће:

(1) За сваку формулу φ без квантификатора и симбола једнакости, ако је $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *хомоморфизам*, онда:

$$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \varphi.$$

(2) За сваку формулу φ без квантификатора, ако је $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *утапање*, онда:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \mathfrak{s}) \models \varphi.$$

Пример 6.6. Да бисмо видели, примера ради, да утапања не чувају нужно све формуле језика $\mathscr{L}$, посматрајмо једноставан пример структура $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}; <)$ и $\mathfrak{B} = (\mathbb{Q}; <)$. Како смо већ напоменули, идентичко пресликавање $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ је утапање. Нека је $\varphi(x, y)$ формула $\exists z(x < z \wedge z < y)$. Узмимо да је $\mathfrak{s}$ индивидуална валуација таква да је $\mathfrak{s}(x) = 1$ и $\mathfrak{s}(y) = 2$. Онда ћемо имати да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \neg\varphi$ али $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \varphi$.

За структуре $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ које су изоморфне, што ћемо да означавамо са $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, можемо да кажемо да деле сва својства осим природе елемената њихових домена. Са друге стране, можемо да посматрамо и структуре које деле макар она својства која могу да се изразе реченицама језика $\mathscr{L}$.

Дефиниција 6.3. За структуре $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ језика $\mathscr{L}$ кажемо да су *елементарно еквивалентне*, што означавамо са $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, ако за сваку реченицу σ језика $\mathscr{L}$ имамо да важи:

$$\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma.$$

Из ове дефиниције следи да за елементарно еквивалентне структуре $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имамо да важи $\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) = \mathsf{Th}(\mathfrak{B})$. Посматрајмо сада класу $\mathscr{K}$ структура језика $\mathscr{L}$. Имамо да је $\mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(\mathscr{K}))$ најмања елементарна класа која садржи $\mathscr{K}$. Ако $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}$ и $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, онда $\mathfrak{B} \in \mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(\mathscr{K}))$. Посебан случај овога је:

$$\mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(\mathfrak{A})) = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}\}.$$

Као последицу Теореме 6.1 имамо следеће тврђење:

Последица 6.1.1. *Ако су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ структуре језика $\mathscr{L}$, онда важи:*

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}.$$

Доказ. Нека су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ структуре језика $\mathscr{L}$ и претпоставимо да важи $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Нека је $h : A \to B$ изоморфизам и σ произвољна реченица језика $\mathscr{L}$. Такође, нека је $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ произвољна индивидуална валуација. На основу Теореме 6.1 имамо да важи

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \sigma \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \mathfrak{s}) \models \sigma.$$

Међутим, пошто је σ реченица, знамо да индивидуалне валуације не утичу на истиносну вредност од σ. Дакле

$$\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma,$$

па пошто је σ била произвољна реченица, следи да је $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. $\dashv$

Импликација у другом смеру не важи у општем случају. Следећи једноставан пример показује да иако не постоји реченица језика првог реда $\mathscr{L}$ која може да направи разлику између структура $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, оне и даље могу да буду далеко од једнаких до на изоморфизам.

Пример 6.7. Посматрајмо структуре $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}; <)$ и $\mathfrak{B} = (\mathbb{Q}; <)$. Ове су структуре елементарно еквивалентне. Са друге стране, оне не могу бити изоморфне, јер је скуп $\mathbb{Q}$ пребројив за разлику од скупа $\mathbb{R}$.

Занимљиво је видети макар неке од примера у којима импликација у супротном смеру из Последице 6.1.1 важи. Узмимо да су (A) и (B) структуре језика $\mathscr{L}$ који нема нелогичких симбола. Дакле, оне су просто непразни скупови. У овом случају изоморфизам је само бијекција, па важи $(A) \cong (B)$ ако и само ако су A и B исте кардиналности.

Лема 6.1. *За произвољне коначне скупове A и B, ако је $(A) \equiv (B)$, онда је $(A) \cong (B)$. Такође, ако је (A) коначна структура језика $\mathscr{L}$, онда постоји реченица σ тог језика таква да за сваку структуру (B) важи:*

$$(A) \cong (B) \Leftrightarrow (B) \models \sigma.$$

Доказ. Да бисмо доказали други део тврђења, претпоставимо да скуп A има n елемената и узмимо да је σ реченица $\sigma_{=n}$ из Примера 5.3. Из тога непосредно следи и први део овог тврђења. $\dashv$

Важно је напоменути да ово тврђење почива на чињеници да су скупови A и B коначни. У случају бесконачних скупова A и B, увек ћемо имати да је $(A) \equiv (B)$, чак и онда када су они различите кардиналности.

Још једна последица Теореме 6.1 је и следећа која се тиче аутоморфизама структура:

Теорема 6.2. *Нека је $\mathfrak{A}$ структура и нека је h аутоморфизам од $\mathfrak{A}$. Такође, нека је $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ једна $n-$арна дефинабилна релација на A, за $n \geq 1$. Онда за свако $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ важи:*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}.$$

Доказ. Нека је φ формула која дефинише $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}}$ у структури $\mathfrak{A}$. Треба да покажемо да важи:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

Међутим, ово следи на основу Теореме 6.1. ⊣

Ову теорему можемо да преформулишемо на начин који ће нам бити од користи у наставку.

Последица 6.2.1. *Нека је* $\mathfrak{A}$ *структура и нека је* h *аутоморфизам од* $\mathfrak{A}$*. Такође, нека је* $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ *једна* $n-$*арна релација на* A*, за* $n \geq 1$*. Претпоставимо да постоје* $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ *такви да тачно једно од следећег важи:*

(1) $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}$*;*

(2) $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}$*.*

Онда $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ *није дефинабилна у структури* $\mathfrak{A}$*.*

Сада ћемо да покажемо како можемо да искористимо претходно тврђење да бисмо показали да неки скупови нису дефинабилни у одређеној структури.

Узмимо за пример структуру $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}; <)$. Показаћемо да је скуп $B \subseteq \mathbb{Z}$ дефинабилан у структури $\mathfrak{A}$ ако и само ако је $B = \emptyset$ или $B = \mathbb{Z}$. Прво, формула $\varphi_1(x) = x \neq x$ дефинише $\emptyset$, као што формула $\varphi_2(x) = x = x$ дефинише скуп $\mathbb{Z}$ у $\mathfrak{A}$.

Претпоставимо да је $B \subseteq \mathbb{Z}$ такав да је $B \neq \emptyset$ и $B \neq \mathbb{Z}$. Нека су $a, b \in \mathbb{Z}$ такви да $a \in B$ и $b \notin B$. Посматрајмо функцију $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ дефинисану као

$$h(c) = c + (b - a),$$

за свако $c \in \mathbb{Z}$. Ова је функција бијекција (њен инверз је $c \mapsto c - (b - a)$) и хомоморфизам, зато што је:

$$\begin{aligned} c_1 < c_2 &\Leftrightarrow c_1 + (b - a) < c_2 + (b - a) \\ &\Leftrightarrow h(c_1) < h(c_2). \end{aligned}$$

Међутим, приметимо да важи

$$h(a) = a + (b - a) = b,$$

па имамо да $a \in B$ али $h(a) \notin B$. Дакле, скуп B није дефинабилан у $\mathfrak{A}$ на основу Последице 6.2.1.

Посматрајмо сада структуру $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}; \cdot)$. Приметимо да су 0 и 1 дефинабилни у овој структури. Нека је $\mathbb{P}$ скуп свих простих бројева и нека је $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ произвољна бијекција. Функцију f можемо да проширимо до функције f' на целом скупу $\mathbb{N}$ овако:

$$f'(p_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot p_n^{a_n}) = f(p_1)^{a_1} \cdot \cdots \cdot f(p_n)^{a_n}.$$

Ако узмемо да је $f'(0) = 0$, онда није тешко да се провери да је f' аутоморфизам од $\mathfrak{A}$. Приметимо да је скуп $\mathbb{P}$ дефинабилан у $\mathfrak{A}$, па за сваки аутоморфизам h од $\mathfrak{A}$ мора да важи $h[\mathbb{P}] = \mathbb{P}$. Пошто хомоморфизам чува множење, видимо да је сваки аутоморфизам од $\mathfrak{A}$ облика f' за неку пермутацију f од $\mathbb{P}$. Дакле, имамо $2^{\aleph_0}$ много аутоморфизама структуре $\mathfrak{A}$.

Да бисмо показали да операција $+$ није дефинабилна у структури $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}; \cdot)$, довољно ће бити да покажемо да релација $<$ није дефинабилна у $\mathfrak{A}$. То је зато што, ако је $+$ дефинабилна, онда формула

$$\varphi(x, y) = \exists z(z + z \neq z \wedge x + z = y)$$

дефинише релацију $<$.

Да бисмо то показали, треба да покажемо да постоји аутоморфизам h од $\mathfrak{A}$ који не чува поредак, тј. такав да важи: за неке p, q имамо $p < q$ али $h(q) \leq h(p)$; рецимо $h(2) = 3$ и $h(3) = 2$. Међутим, ово следи на основу онога што смо раније рекли – свака пермутација скупа $\mathbb{P}$ индукује аутоморфизам структуре $\mathfrak{A}$. Дакле, имамо:

Теорема 6.3. *Нека је $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}; \cdot)$. Онда $+$ и $<$ нису дефинабилни у $\mathfrak{A}$.*

Напомена. Такође је случај да операција $\cdot$ није дефинабилна у структури $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}; +)$, али ово не можемо да покажемо на начин на који смо то учинили горе, служећи се појмом хомоморфизма, јер је једини аутоморфизам структуре $\mathfrak{B}$ идентитет, пошто је сваки скуп облика $\{k\}$, где је k природан број, дефинабилан у $\mathfrak{B}$.

Пример 6.8. Нека је $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}; Z, +, \cdot)$ структура реалних бројева са уобичајеним операцијама сабирања и множења и унарном релацијом Z таквом да је $Z(a)$ ако и само ако $a \in \mathbb{Z}$. Онда имамо да је $\{\pi\}$ дефинабилан у $\mathfrak{A}$. Са друге стране, на основу теореме Тарског о елиминацији квантификатора у теорији реално затворених поља, знамо да $\{\pi\}$ није дефинабилан у $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}; +, \cdot)$.

Елементарне подструктуре. За формуле облика $\exists \vec{x} \varphi$, где је формула φ без квантификатора, кажемо да су Σ_1 формуле. Такође, за формуле облика $\forall \vec{x} \varphi$, где је формула φ без квантификатора, кажемо да су Π_1 формуле. Другим речима, Σ_1 формула је формула која започиње блоком егзистенцијалних квантификатора после којих следи формула без квантификатора, и слично важи за Π_1 формуле. Овакве формуле припадају једној важној класи формула о којима ћемо више да кажемо у наставку. Међутим, сада желимо да докажемо следеће тврђење:

Теорема 6.4. *Нека су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ структуре језика $\mathscr{L}$. Претпоставимо да важи $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и нека је $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ произвољна индивидуална валуација. Онда имамо да:*

(1) за сваку формулу без квантификатора φ:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \varphi;$$

(2) за сваку Σ_1 формулу φ:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \Rightarrow (\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \varphi;$$

(3) за сваку Π_1 формулу φ:

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \varphi \Rightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi.$$

Доказ. Тврђење (1) следи из Теореме 6.1 и Напомене која јој следи. Треба само да приметимо да за идентичко пресликавање i, које је утапање, имамо да важи $i \circ \mathfrak{s} = \mathfrak{s}$.

Тврђење (2) ћемо да докажемо индукцијом. Ако је φ формула без квантификатора, онда можемо да применимо (1). Претпоставимо, онда, да тврђење важи за φ као и да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \exists x\varphi$. На основу дефиниције, можемо да нађемо $a \in A$ такво да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$. На основу индуктивне хипотезе имамо да је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$, па следи да је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \exists x\varphi$.

Тврђење (3) доказујемо слично као и претходно. Поново, ако је φ формула без квантификатора, можемо да применимо (1). Претпоставимо да тврђење важи за φ и нека је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \forall x\varphi$. Дакле, за свако $a \in A$ имамо $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$, па на основу индуктивне хипотезе следи да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$. Дакле, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\varphi$. $\dashv$

Узмимо, примера ради, да је σ реченица $\forall xy(\mathsf{f}xy = \mathsf{f}yx)$. То је једна Π_1 формула. Ако је $\mathfrak{B}$ структура таква да важи $\mathfrak{B} \models \sigma$, онда ћемо увек када имамо да је $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ имати и $\mathfrak{A} \models \sigma$. Тако ће, рецимо, свака подгрупа комутативне групе и сама да буде комутативна.

Еквиваленција из тврђења (1) претходне теореме може лако престати да важи ако посматрамо формуле које садрже квантификаторе. Природно је претпоставити да, ако имамо $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и A је прави подскуп од B, онда, пошто квантификујемо преко целог домена структуре, рекурзивне дефиниције од $\models$ могу јако да се разликују. Међутим, није немогуће да ће бити и случајева таквих структура које задовољавају исте формуле. Такве структуре карактерише следећа дефиниција:

Дефиниција 6.4. Нека је $\mathscr{L}$ језик првог реда, $\mathfrak{B}$ структура језика $\mathscr{L}$ и $\mathfrak{A}$ подструктура од $\mathfrak{B}$. Кажемо да је $\mathfrak{A}$ *елементарна подструктура* од $\mathfrak{B}$, што записујемо као $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, ако за сваку формулу φ језика $\mathscr{L}$ и сваку индивидуалну валуацију $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ важи:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \varphi.$$

Ако је $\mathfrak{A}$ елементарна подструктура од $\mathfrak{B}$, онда важи да је $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Да бисмо то видели, приметимо само да је свака реченица σ формула, као и да индивидуалне валуације не утичу на истиносну вредност реченица, пошто оне немају слободних промењљивих.

Са друге стране, могуће је имати две структуре $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, такве да је $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ али $\mathfrak{A} \not\preceq \mathfrak{B}$. Да бисмо то видели, посматрајмо структуре $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}; S)$ и $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}^+; S)$. Имамо да је $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Приметимо такође да је $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ на основу изоморфизма

$$h(m) = m - 1.$$

Дакле, на основу Последице 6.1.1 имамо да је $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Међутим, имамо да је $\mathfrak{A} \not\preceq \mathfrak{B}$. Да бисмо то видели, узмимо формулу

$$\varphi(x) = \exists y(\mathbf{S}y = x).$$

Онда ћемо имати да је

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow 1]) \not\models \varphi,$$

као и

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow 1]) \models \varphi.$$

Овај аргумент може да се уопшти да бисмо показали да је $\mathfrak{B}$ једина елементарна подструктура од $\mathfrak{B}$. То је зато што елементарна подструктура од $\mathfrak{B}$ мора имати најмањи елемент на основу добре уређености и тај најмањи елемент мора бити 0 на основу аргумента горе. Осим тога, домен елементарне подструктуре мора да буде затворен за операцију следбеника.

Као још један пример, посматрајмо језик линеарних уређења $\mathscr{L} = \{<\}$ и затворене интервале $[0,1], [0,2] \subseteq \mathbb{R}$ као структуре овог језика, са уобичајеним уређењем. Онда ћемо имати да је

$$([0,1]; <) \cong ([0,2]; <),$$

па ћемо као последицу имати и

$$([0,1]; <) \equiv ([0,2]; <).$$

Јасно је, такође, да је $([0,1]; <)$ подструктура од $([0,2]; <)$. Посматрајмо сада формулу

$$\psi(x) = \forall y(y < x \vee y = x).$$

Онда ћемо имати $([0,1], \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow 1]) \models \psi$ али $([0,2], \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow 1]) \not\models \psi$. Дакле, и у овом случају имамо примере структура $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ таквих да важи:

(1) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$;
(2) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, па тиме и $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$;
(3) $\mathfrak{A} \not\preceq \mathfrak{B}$.

Следећа важна теорема нам даје користан критеријум на који можемо да се ослонимо када проверавамо да ли је нека подструктура дате структуре елементарна или када желимо да, пошавши од неке структуре, такве елементарне подструктуре конструишемо.

Теорема 6.5 (Тарски-Вотов тест). *Претпоставимо да је $\mathfrak{A}$ подструктура од $\mathfrak{B}$. Онда су следећа тврђења еквивалентна:*

(1) $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.
(2) Ако је φ формула, $x \in \mathsf{V}$ и $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ индивидуална валуација таква да важи $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \exists x \varphi$, онда постоји $a \in A$ такво да је

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi.$$

Доказ. Прво ћемо да покажемо да (1) повлачи (2). Претпоставимо да је $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Нека је φ произвољна формула и $\mathfrak{s}$ индивидуална валуација таква да важи $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \exists x \varphi$. Пошто је $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, следи да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \exists x \varphi$. Узмимо $a \in A$ такво да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$. Поново, на основу $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, имамо да је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$.

Да бисмо показали да (2) повлачи (1), треба индукцијом по сложености формуле φ да покажемо да за сваку индивидуалну валуацију $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ важи:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \varphi.$$

Приметимо прво да ово важи за све формуле φ без квантификатора, на основу Теореме 6.4. Дакле, важи и за све атомске формуле. Претпоставимо сада да је $\varphi = \neg\psi$. За свако $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ важи:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \neg\psi &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \psi\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \not\models \psi\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \neg\psi.\end{aligned}$$

Са првог на други ред горе можемо да пређемо на основу индуктивне хипотезе за формулу ψ.

Слично поступамо ако је формула φ облика импликације, $\varphi = \psi \to \sigma$:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, s) \models \psi \to \sigma &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s) \not\models \psi \text{ или } (\mathfrak{A}, s) \models \sigma\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, s) \not\models \psi \text{ или } (\mathfrak{B}, s) \models \sigma\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, s) \models \psi \to \sigma.\end{aligned}$$

Са нашом дефиницијом егзистенцијалног квантификатора помоћу универзалног, уз напомену која следи Дефиницију 5.4, једноставно је видети да за формулу φ облика $\exists x\psi$ важи:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, s) \models \exists x\psi &\Leftrightarrow \text{ постоји } a \in A,\ (\mathfrak{A}, s[x \rightsquigarrow a]) \models \psi\\ &\Leftrightarrow \text{ постоји } a \in A,\ (\mathfrak{B}, s[x \rightsquigarrow a]) \models \psi\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, s) \models \exists x\psi.\end{aligned}$$

На крају, ако је формула $\varphi = \forall x\psi$, онда примењујемо претходни случај, Тврђење 5.1 и индуктивну хипотезу:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\psi &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s) \models \neg\exists x\neg\psi\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, s) \models \neg\exists x\neg\psi\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, s) \models \forall x\psi.\end{aligned}$$

Дакле, за сваку формулу φ и сваку индивидуалну валуацију s:

$$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, s) \models \varphi.$$

$\dashv$

Као илустрацију претходне теореме, погледајмо како бисмо пошавши од структуре $\mathfrak{B}$ могли да изградимо једну њену елементарну подструктуру. Рецимо да је $A_0 = \{\mathsf{c}^{\mathfrak{B}} \mid \mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}\}$. Ако је $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, онда морамо имати да је $A_0 \subseteq A$.

Даље, треба да обезбедимо да скуп који ће бити домен наше подструктуре буде затворен за функције $\mathsf{f}^{\mathfrak{B}}$, где је $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$. Рецимо да смо то учинили и да смо, пошавши од скупа A_0, конструисали његово затворење A_1 за све такве функције. Сада треба да се уверимо да је критеријум из Теореме 6.5 задовољен. Узмимо зато формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ и индивидуалну валуацију s за коју важи да је свако $s(x_i) = a_i \in A_1$. Ако се испостави да је случај да важи:

$$(\mathfrak{B}, s) \models \exists x\varphi,$$

онда можемо да фиксирамо елемент $b \in B$ такав да је:

$$(\mathfrak{B}, s[y \rightsquigarrow b]) \models \varphi.$$

Сада, такво b треба да придружимо нашем скупу A_1 да би наша подструктура имала сведока за ову егзистенцијалну формулу. И не само то - желимо да фиксирамо сведоке за све формуле и индивидуалне валуације које приписују елементе скупа A_1 слободним променљивима, и све да их придружимо скупу A_1 да бисмо добили скуп A_2. Међутим, скуп A_2 не мора у општем случају да буде затворен за функције $\mathsf{f}^{\mathfrak{B}}$. Осим тога, ако допустимо индивидуалне валуације које приписују вредности променљивима из скупа из A_2, онда ћемо имати још више сведока егзистенцијалних формула које морамо да узмемо у обзир. Оно што треба да чинимо је да претходну процедуру итерирамо: затварањем за функције $\mathsf{f}^{\mathfrak{B}}$ и додавањем одговарајућих сведока.

Да претходно речено заиста можемо да урадимо, каже нам следећа теорема која је један од основних резултата теорије модела и логике уопште.

Теорема 6.6 (Левенхајм-Сколемова теорема). *Нека је $\mathscr{L}$ пребројив језик првог реда, $\mathfrak{B}$ структура тог језика и $X \subseteq B$ пребројив скуп. Онда постоји пребројива елементарна подструктура $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, таква да је $X \subseteq A$.*

Доказ. За сваку формулу φ и променљиву $y \in \mathsf{V}$ такву да је $\mathsf{FV}(\varphi) = \{y\}$, дефинисаћемо елемент $\mathscr{b}_{\varphi,y}$ скупа B на следећи начин: ако је $\mathfrak{B} \models \exists y\varphi$, узмимо произвољно $b \in B$ такво да је $(\mathfrak{B}, \mathscr{s}[y \rightsquigarrow b]) \models \varphi$ и нека је $\mathscr{b}_{\varphi,y} = b$. Иначе, нека је $\mathscr{b}_{\varphi,y} = d$, где је d неки унапред фиксиран елемент скупа B који мора да постоји јер је $B \neq \emptyset$.

Претпоставимо сада да је φ формула која осим y има још и неке друге слободне променљиве; рецимо $\mathsf{FV}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n, y\}$. За сваку такву формулу дефинисаћемо функцију $h_{\varphi,y} : B^n \to B$ на следећи начин: нека су $a_1, \ldots, a_n \in B$ произвољни. Ако је $(\mathfrak{B}, \mathscr{s}) \models \exists y\varphi$, где је $\mathscr{s}(x_i) = a_i$ за свако $1 \leq i \leq n$, узмимо произвољно $b \in B$ такво да је $(\mathfrak{B}, \mathscr{s}[y \rightsquigarrow b]) \models \varphi$ и нека је $h_{\varphi,y}(a_1, \ldots, a_n) = b$. Иначе, нека је $h_{\varphi,y}(a_1, \ldots, a_n) = d$, где је d као и горе.

Узмимо сада да је X' следећи скуп:

$$X' = X \cup \{d\} \cup \{\mathsf{c}^{\mathfrak{B}} \mid \mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}\} \cup \{\mathscr{b}_{\varphi,y} \mid \varphi \in \mathscr{F}, y \in \mathsf{V} \text{ и } \mathsf{FV}(\varphi) = \{y\}\}.$$

Нека је скуп A затворење скупа X' за све функције $\mathsf{f}^{\mathfrak{B}}$, где је $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$, као и све функције $h_{\varphi,y}$, где је φ формула, $y \in \mathsf{FV}(\varphi)$ и $|\mathsf{FV}(\varphi)| \geq 2$.

Пошто је језик $\mathscr{L}$ пребројив, имаћемо да је и скуп формула $\mathscr{F}$ језика $\mathscr{L}$ такође пребројив. Осим тога, скуп променљивих V је пребројив па ће такав бити и скуп $\mathscr{F} \times \mathsf{V}$. Пошто је скуп X пребројив према претпоставци, имамо да је и скуп X' пребројив. Такође, на основу чињенице да је $\mathscr{F}$ пребројив, следи да је пребројив и скуп:

$$\{\mathsf{f}^{\mathfrak{B}} \mid \mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}\} \cup \{h_{\varphi,y} \mid \varphi \in \mathscr{F}, y \in \mathsf{FV}(\varphi) \text{ и } |\mathsf{FV}(\varphi)| \geq 2\}.$$

Из свега што смо до сада рекли следи да је скуп A пребројив. Пошто је скуп A затворен за све функције $\mathsf{f}^{\mathfrak{B}}$, имамо да је A домен подструктуре $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Пошто $X \subseteq X'$, следи да $X \subseteq A$.

Преостаје нам, дакле, да покажемо да је $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Да бисмо то урадили, послужићемо се Теоремом 6.5. Узмимо произвољну формулу φ, променљиву y и индивидуалну валуацију $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$, такве да важи $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \exists y \varphi$.

Претпоставимо прво да $y \notin \mathsf{FV}(\varphi)$. Пошто имамо да је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \exists y \varphi$, следи да можемо да нађемо неко $b \in B$такво да је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[y \rightsquigarrow b]) \models \varphi$. Али, $y \notin \mathsf{FV}(\varphi)$, па следи да је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[y \rightsquigarrow d]) \models \varphi$.

Претпоставимо даље да је $\mathsf{FV}(\varphi) = \{y\}$ и нека је $\mathscr{b}_{\varphi,y} = a \in A$. Пошто је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \exists y \varphi$, следи да је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[y \rightsquigarrow a]) \models \varphi$, на основу дефиниције од $\mathscr{b}_{\varphi,y}$, па следи да постоји $a \in A$ такво да је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[y \rightsquigarrow a]) \models \varphi$.

На крају, претпоставимо да је $\mathsf{FV}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n, y\}$. За свако $1 \leq i \leq n$, нека је $a_i = \mathfrak{s}(x_i)$ и узмимо да је $b = h_{\varphi,y}(a_1, \ldots, a_n) \in A$. Пошто је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}) \models \exists y \varphi$, имамо да важи $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[y \rightsquigarrow b]) \models \varphi$ на основу дефиниције од $h_{\varphi,y}$. Дакле, постоји $a \in A$ такво да је $(\mathfrak{B}, \mathfrak{s}[y \rightsquigarrow a]) \models \varphi$.

Из овога следи да имамо да је $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. ⊣

Последица 6.6.1. *Претпоставимо да је $\mathscr{L}$ пребројив језик и нека је $\mathfrak{B}$ структура тог језика. Онда постоји пребројива структура $\mathfrak{A}$ таква да је $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.*

Доказ. На основу претходне теореме, за $X = \emptyset$, постоји пребројива елементарна подструктура $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Онда ће, за сваку реченицу σ језика $\mathscr{L}$ важити да $\mathfrak{A} \models \sigma$ акко $\mathfrak{B} \models \sigma$. Дакле, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. ⊣

Левенхајм-Сколемова теорема (6.6) је важно тврђење које нам говори о границама логике првог реда, посебно када је реч о неким аспектима кардиналности структура. Те ћемо границе још боље да упознамо пошто будемо доказали *Теорему компактности* (10.3) логике првог реда.

7. Супституција

Ако нам је дат језик $\mathscr{L}$, структура тог језика $\mathfrak{A}$ као и индивидуална валуација $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$, онда знамо да сваки терм нашег језика именује неки објект домена A. Ако је t терм, онда је објект који је овим термом именован $\bar{\mathfrak{s}}(t)$. Када знамо да неко тврђење важи за све објекте домена A, онда можемо да закључимо да оно важи и за сваки појединачни елемент од A. Да бисмо ову идеју учинили прецизном, треба да кажемо шта значи супституисати терм t место промењиве унутар неке формуле. Оно што би могло да се очекује јесте да ако је $\forall x\varphi$ истинито у структури $\mathfrak{A}$ за индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$, онда ће и формула коју добијамо када терм t супституишемо место x у формули φ да буде истинито у $\mathfrak{A}$ за $\mathfrak{s}$. Да бисмо видели како то можемо коректно да урадимо, прво треба да објаснимо шта тачно подразумевамо под операцијом супституције.

Операција супституције. Ако је α реч на алфабету $\mathscr{A}$ и $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ су симболи тог алфабета, онда ћемо са $(\alpha)^{\mathfrak{s}_1}_{\mathfrak{s}_2}$ да означавамо реч коју добијамо *супституцијом* симбола $\mathfrak{s}_2$ место свих јављања симбола $\mathfrak{s}_1$ у α. На пример, ако је $\alpha = babadeda$, онда је $(\alpha)^d_b = bababeba$. Нас неће да занима ова операција на свим речима наших алфабета, него само посебни њени случајеви који се тичу смислених речи - терама и формула.

Надаље ћемо да претпостављамо да се налазимо унутар неког произвољног али фиксираног језика првог реда $\mathscr{L}$. Сада ћемо рекурзивно да дефинишемо операцију супституције терма t место свих јављања промењиве x на $\mathscr{T}$:

Дефиниција 7.1. Нека је $x \in \mathsf{V}$ и $t \in \mathscr{T}$. Операцију супституције $(\ )^x_t : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ дефинишемо рекурзивно, на следећи начин:

(1) $(\mathsf{c})^x_t = \mathsf{c}$, за свако $\mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}$;

(2) $(y)^x_t = \begin{cases} t & \text{ако је } y = x, \\ y & \text{иначе,} \end{cases}$ за свако $y \in \mathsf{V}$;

(3) $(\mathsf{f}s_1 \ldots s_n)^x_t = \mathsf{f}(s_1)^x_t \ldots (s_n)^x_t$, за сваки $n-$арни функцијски симбол $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$ и терме $s_1, \ldots, s_n \in \mathscr{T}$.

Лема 7.1. *Нека је $\mathfrak{A}$ структура језика $\mathcal{L}$, $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ индивидуална валуација, $t \in \mathcal{T}$ терм и $x \in \mathsf{V}$ променљива. Онда, за сваки терм s имамо да важи:*

$$\bar{\mathfrak{s}}(s^x_t) = \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(s).$$

Доказ. Погледајмо, прво, шта се тачно тврди овом лемом. Да бисмо одредили интерпретацију терма s^x_t за индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$ треба само да изменимо индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$ тако да променљивој x буде приписана интерпретација терма t за $\mathfrak{s}$, и да онда интерпретирамо s на основу те нове индивидуалне валуације. Лему ћемо да докажемо индукцијом по сложености терма s:

(1) Ако је $s = \mathsf{c}$, за неко $\mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathcal{L}}$, онда:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{s}}(\mathsf{c}^x_t) &= \bar{\mathfrak{s}}(\mathsf{c})\\ &= \mathsf{c}^{\mathfrak{A}}\\ &= \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)](\mathsf{c})\\ &= \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(\mathsf{c}).\end{aligned}$$

(2) Ако је $s \in \mathsf{V}$ и $s = x$, онда:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{s}}(x^x_t) &= \bar{\mathfrak{s}}(t)\\ &= \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)](x)\\ &= \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(x).\end{aligned}$$

Ако је $s \in \mathsf{V}$ и $s = y \neq x$, онда:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{s}}(y^x_t) &= \bar{\mathfrak{s}}(y)\\ &= \mathfrak{s}(y)\\ &= \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)](y)\\ &= \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(y).\end{aligned}$$

(3) Ако је $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathcal{L}}$ и $s_1, \ldots, s_n$ су терми, онда:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{s}}((\mathsf{f}s_1 \ldots s_n)^x_t) &= \bar{\mathfrak{s}}(\mathsf{f}(s_1)^x_t \ldots (s_n)^x_t)\\ &= \mathsf{f}^{\mathfrak{A}}(\bar{\mathfrak{s}}((s_1)^x_t) \ldots \bar{\mathfrak{s}}((s_n)^x_t))\\ &= \mathsf{f}^{\mathfrak{A}}(\overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(s_1) \ldots \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(s_n))\\ &= \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(\mathsf{f}s_1 \ldots s_n).\end{aligned}$$

Приметимо само да смо са другог на трећи ред горе могли да пређемо на основу индуктивне хипотезе.

⊣

Сада када смо дефинисали операцију супституције на термима, њоме ћемо да се послужимо да бисмо дефинисали одговарајућу операцију $(\ )^x_t : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ на формулама нашег језика. У овом случају, желимо да кажемо шта значи супституисати терм t место свих *слободних јављања* променљиве x у формули φ.

Дефиниција 7.2. Нека је $x \in \mathsf{V}$ и $t \in \mathscr{T}$. Операцију супституције $(\ )^x_t : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ дефинишемо рекурзивно, на следеће начин:

(1) $(s_1 = s_2)^x_t = (s_1)^x_t = (s_2)^x_t$, за свако $s_1, s_2 \in \mathscr{T}$;
(2) $(\mathsf{R}s_1 \dots s_n)^x_t = \mathsf{R}(s_1)^x_t \dots (s_n)^x_t$, за сваки $n-$арни $\mathsf{R} \in \mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}$ и $s_1, \dots, s_n \in \mathscr{T}$;
(3) $(\neg\psi)^x_t = \neg\psi^x_t$, за свако $\psi \in \mathscr{F}$;
(4) $(\psi \to \sigma)^x_t = \psi^x_t \to \sigma^x_t$, за свако $\psi, \sigma \in \mathscr{F}$;
(5) $(\forall y\psi)^x_t = \begin{cases} \forall y\psi & \text{ако је } y = x, \\ \forall y\psi^x_t & \text{иначе,} \end{cases}$ за свако $y \in \mathsf{V}$ и $\psi \in \mathscr{F}$.

У последњем делу претходне дефиниције имамо да променљива x није слободна у формули $\forall y\psi$, ако је $y = x$ па самим тим нема слободних јављања променљиве x у тој формули место којих бисмо терм t могли да супституишемо.

Следећи једноставан резултат који се тиче супституције ће нам користити у наставку.

Тврђење 7.2.1. Нека су x и y различите променљиве и t терм језика $\mathscr{L}$. Онда важи следеће:

(1) За сваки терм s језика $\mathscr{L}$ у коме се променљива y не јавља, важи
$$(s^x_y)^y_t = s^x_t.$$
(2) За сваку формулу φ језика $\mathscr{L}$ у којој се променљива y не јавља, важи
$$(\varphi^x_y)^y_t = \varphi^x_t.$$

Доказ. Прво ћемо, индукцијом по сложености терама да покажемо да важи (1). Узмимо да је s атомски терм и да се променљива y не јавља у s. Онда имамо:
$$(s^x_y)^y_t = \begin{cases} y^y_t = t = s^x_t & \text{ако је } s = x, \\ s^y_t = s = s^x_t & \text{ако је } s \neq x. \end{cases}$$
Сада, нека је $s = \mathsf{f}u_1 \dots u_n$ и претпоставимо опет да се y не јавља у s. Онда се y не јавља ни у једном u_i, за $1 \leq i \leq n$ па имамо:
$$(s^x_y)^y_t = \mathsf{f}({u_1}^x_y)^y_t \dots ({u_n}^x_y)^y_t = \mathsf{f}{u_1}^x_t \dots {u_n}^x_t = s^x_t,$$
где друга од једнакости горе важи на основу индуктивне хипотезе.

Слично томе, показаћемо да важи (2), сада индукцијом по сложености формула. Ако је φ облика $\mathsf{R}u_1 \dots u_n$ и променљива y се не јавља у φ, онда имамо:

$$(\varphi^x_y)^y_t = \mathsf{R}({u_1}^x_y)^y_t \dots ({u_n}^x_y)^y_t = \mathsf{R}{u_1}^x_t \dots {u_n}^x_t = \varphi^x_t,$$

где друга од једнакости горе важи на основу резултата (1) који се тицао терама. Случај када је формула φ облика једнакости се доказује сасвим слично.

Ако је формула φ облика $\psi \to \sigma$ и y се не јавља у φ, онда се та променљива не јавља ни у једној од формула ψ и σ. У том случају ћемо имати да важи:

$$(\varphi^x_y)^y_t = (\psi^x_y)^y_t \to (\sigma^x_y)^y_t = \psi^x_t \to \sigma^x_t = \varphi^x_t.$$

Поново, друга једнакост горе важи на основу индуктивне хипотезе. Случај када је формула φ облика $\neg\psi$ се опет доказује слично овом.

На крају, узмимо да је формула φ облика $\forall z\psi$ и претпоставимо да се y не јавља у φ. Ако имамо да $x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$, онда:

$$(\varphi^x_y)^y_t = \varphi^y_t = \varphi = \varphi^x_t.$$

Са друге стране, ако $x \in \mathsf{FV}(\varphi)$, онда пошто се y не јавља у φ имамо да су променљиве y и z различите па следи:

$$(\varphi^x_y)^y_t = (\forall z\psi^x_y)^y_t = \forall z(\psi^x_y)^y_t = \forall z\psi^x_t = \varphi^x_t.$$

$\dashv$

Допуштене супституције. До сада смо о операцији супституције говорили углавном са становишта синтаксе. Треба, међутим, имати на уму да семантичка својства ове операције нису тако једноставна. Да бисмо то видели, претпоставимо да нам је дата структура $\mathfrak{A}$ језика $\mathscr{L}$ заједно са индивидуалном валуацијом $\mathfrak{s}$. Онда сваки терм t нашег језика именује неки објекат $\bar{\mathfrak{s}}(t)$ домена A. Посматрајмо сада формулу $\forall x\varphi$ и нека је t терм. Можда бисмо могли да очекујемо да ће следећа импликација да важи:

$$\mathfrak{A} \models \forall x\varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi^x_t,$$

Другим речима, ако нешто важи за све објекте у одређеном контексту, онда то важи и за сваки појединачни објекат.

Међутим, импликација одозго неће да важи у општем случају. Да бисмо то видели, узмимо да је $\varphi = \exists y(x \neq y)$. Онда ћемо имати да важи $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi$ увек када структура $\mathfrak{A}$ има макар два елемента. Међутим, $\mathfrak{A} \models \varphi^x_y$, где је $\varphi^x_y = \exists y(y \neq y)$, сасвим сигурно не важи. То је зато што је променљива y након супституције постала везана у формули φ^x_y. Да бисмо такве случајеве избегли, морамо да кажемо какве ћемо супституције терма t место x у φ да сматрамо допуштеним.

Дефиниција 7.3. За сваку формулу φ, терм t и промењиву x, кажемо да је t *слободан за супституцију место* x у φ ако и само ако једно од следећег важи:

(1) φ је атомска формула;
(2) φ је облика $\neg\psi$, за неко $\psi \in \mathscr{F}$, и t је слободан за супституцију место x у ψ;
(3) φ је облика $\psi \to \sigma$, за неко $\psi, \sigma \in \mathscr{F}$, и t је слободан за супституцију место x у ψ и σ;
(4) φ је облика $\forall y \psi$, за неко $\psi \in \mathscr{F}$ и $y \in \mathsf{V}$, и важи:
  (а) $x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$, или
  (б) t је слободан за супституцију место x у ψ и y се не јавља у t.

Напомена. Приметимо да на основу претходно реченог следи да за формулу φ и промењиву x имамо:

· $\varphi^x_x = \varphi$,
· x је слободан за супституцију место x у φ,
· ако x није слободно у φ, онда је $\varphi^x_t = \varphi$, за сваки терм t.

Сада ћемо да докажемо једну једноставну техничку лему која ће нам бити корисна у наставку.

Лема 7.2. *Нека је* $\mathfrak{A}$ *структура језика* $\mathscr{L}$, $\mathfrak{s}$ *индивидуална валуација и* $a \in A$. *За сваки терм* t *и промењиву* x *која се не јавља у* t *имамо да важи:*

$$\overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]}(t) = \bar{\mathfrak{s}}(t).$$

Доказ. Доказ је сасвим једноставан, индукцијом по сложености терма t. Узмимо, примера ради, случај када је $t = y$, где је y промењива различита од x:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]}(y) &= \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a](y)\\ &= \mathfrak{s}(y)\\ &= \bar{\mathfrak{s}}(y).\end{aligned}$$

Такође је једноставно показати да тврђење важи ако је $t = \mathsf{c}$, где је $\mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}$. Ако је $t = \mathsf{f}t_1 \dots t_n$, где је $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$ један $n-$арни функцијски симбол и $t_1, \dots, t_n \in \mathscr{T}$ су терми у којима се не јавља променљива x, онда:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]}(t) &= \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]}(\mathsf{f}t_1 \dots t_n)\\ &= \mathsf{f}^{\mathfrak{A}}(\overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]}(t_1), \dots, \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]}(t_n))\\ &= \mathsf{f}^{\mathfrak{A}}(\bar{\mathfrak{s}}(t_1), \dots, \bar{\mathfrak{s}}(t_n))\\ &= \bar{\mathfrak{s}}(\mathsf{f}t_1 \dots t_n)\\ &= \bar{\mathfrak{s}}(t).\end{aligned}$$

$\dashv$

Сада ћемо да покажемо да се наша операција супституције на формулама, уз ограничења која смо увели, понаша онако како бисмо и очекивали:

Лема 7.3 (Лема о супституцији). *Нека је $\mathfrak{A}$ структура језика $\mathscr{L}$, $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ индивидуална валуација, $t \in \mathscr{T}$ терм и $x \in \mathsf{V}$ променљива. Онда, за сваку формулу $\varphi \in \mathscr{F}$, под условом да је t слободан за супституцију место x у φ, важи следеће:*

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi^x_t \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]) \models \varphi.$$

Доказ. Тврђење ћемо да докажемо индукцијом по сложености формуле $\varphi \in \mathscr{F}$. Претпоставимо прво да су $s_1, s_2 \in \mathscr{T}$ и да је $\varphi = s_1 = s_2$. Онда имамо:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models (s_1 = s_2)^x_t &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models (s_1)^x_t = (s_2)^x_t\\ &\Leftrightarrow \bar{\mathfrak{s}}((s_1)^x_t) = \bar{\mathfrak{s}}((s_2)^x_t)\\ &\Leftrightarrow \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(s_1) = \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(s_2)\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]) \models s_1 = s_2.\end{aligned}$$

Са другог на трећи ред горе смо могли да пређемо на основу Леме 7.1.

Узмимо сада да су $s_1, \dots, s_n \in \mathscr{T}$, $\mathsf{R} \in \mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}$ $n-$арни релацијски симбол и $\varphi = \mathsf{R}s_1 \dots s_n$:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models (\mathsf{R}s_1 \dots u_s)^x_t &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \mathsf{R}(s_1)^x_t \dots (s_n)^x_t\\ &\Leftrightarrow (\bar{\mathfrak{s}}((s_1)^x_t), \dots, \bar{\mathfrak{s}}((s_n)^x_t)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}\\ &\Leftrightarrow (\overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(s_1), \dots, \overline{\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]}(s_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]) \models \mathsf{R}s_1 \dots s_n.\end{aligned}$$

Поново смо са другог на трећи ред прешли на основу Леме 7.1.

Узмимо сада да је $\varphi = \neg\psi$, као и да тврђење важи за ψ. Приметимо да, пошто је t слободан за супституцију место x у φ, онда он мора бити слободан за супституцију место x и у ψ.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models (\neg\psi)^x_t &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \neg\psi^x_t \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \psi^x_t \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]) \not\models \psi \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]) \models \neg\psi.\end{aligned}$$

Сада смо са другог на трећи ред горе могли да пређемо на основу индуктивне хипотезе за ψ. Случај у коме је $\varphi = \psi \to \sigma$ се доказује слично претходном.

Узмимо на крају да је $\varphi = \forall y\psi$, као и да тврђење важи за ψ. Имамо два случаја на основу дела (5) Дефиниције 7.3. Прво, ако $x \notin \mathsf{FV}(\forall y\psi)$, онда имамо:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models (\forall y\psi)^x_t &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall y\psi \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]) \models \forall y\psi.\end{aligned}$$

Са првог на други ред можемо прећи на основу Леме 7.2.

Иначе имамо да се променљива y не јавља у t и приде је терм t слободан за супституцију место x у ψ. Приметимо дакле да је, у овом случају, $x \in \mathsf{FV}(\forall y\psi)$ и $x \neq y$. Онда имамо да важи:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models (\forall y\psi)^x_t &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall y\psi^x_t \\ &\Leftrightarrow \text{за свако } a \in A \text{ имамо } (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[y \rightsquigarrow a]) \models \psi^x_t \\ &\Leftrightarrow \quad -\shortparallel- \quad (\mathfrak{A}, (\mathfrak{s}[y \rightsquigarrow a])[x \rightsquigarrow \overline{\mathfrak{s}[y \rightsquigarrow a]}(t)]) \models \psi \\ &\Leftrightarrow \quad -\shortparallel- \quad (\mathfrak{A}, (\mathfrak{s}[y \rightsquigarrow a])[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]) \models \psi \\ &\Leftrightarrow \quad -\shortparallel- \quad (\mathfrak{A}, (\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)])[y \rightsquigarrow a]) \models \psi \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]) \models \forall y\psi.\end{aligned}$$

Горе смо са другог на трећи ред могли да пређемо на основу индуктивне хипотезе. Са трећег на четврти ред прелазимо на основу Леме 7.2, а са четвртог на пети ред можемо да пређемо зато што је $x \neq y$. $\dashv$

Следеће је тврђење једноставна последица претходне леме.

Последица 7.0.1. *За произвољне терме s_1, s_2 и t имамо да важи:*

$$\models s_1 = s_2 \to t^x_{s_1} = t^x_{s_2}.$$

Такође, за сваку формулу φ такву да су s_1, s_2 слободни за супституцију место x у формули φ:

$$\models s_1 = s_2 \to (\varphi^x_{s_1} \leftrightarrow \varphi^x_{s_2}).$$

У вези са претходном последицом је и следећи резултат који се тиче операције супституције али у једном ширем смислу.

Тврђење 7.1. *Нека су x и y променљиве, t и t' терми а φ и φ' атомске формуле. Нека је још t' добијен из t заменом неких, не нужно свих, јављања променљиве x са y и слично томе за φ' и φ. Онда ћемо имати следеће:*

(1) $\models x = y \rightarrow t = t'$,
(2) $\models x = y \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi')$.

Доказ. Тврђење (1) је једноставно доказати индукцијом по сложености терма t. Да бисмо доказали (2) узмимо произвољне $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{s}$ такве да важи

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models x = y,$$

односно $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(y)$. Ако је φ облика $t_1 = t_2$, онда је φ' облика $t_1' = t_2'$, где су t_1', t_2' добијени из t_1, t_2 као у формулацији тврђења. Онда важи:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi &\Leftrightarrow \bar{\mathfrak{s}}(t_1) = \bar{\mathfrak{s}}(t_2)\\ &\Leftrightarrow \bar{\mathfrak{s}}(t_1') = \bar{\mathfrak{s}}(t_2')\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi'.\end{aligned}$$

Са првог на други ред смо могли да пређемо на основу резултата (1) који се тицао терама. Ако је формула φ облика $\mathsf{R}t_1 \dots t_n$, за неки $n-$арни релацијски симбол R, онда поступамо сасвим слично:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi &\Leftrightarrow (\bar{\mathfrak{s}}(t_1), \dots, \bar{\mathfrak{s}}(t_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}\\ &\Leftrightarrow (\bar{\mathfrak{s}}(t_1'), \dots, \bar{\mathfrak{s}}(t_n')) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}\\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi'.\end{aligned}$$

Као и у претходном случају, са првог на други ред смо могли да пређемо на основу дела (1) овог тврђења. $\dashv$

Тврђење 7.2. *За сваку формулу φ, променљиву x и терм t који је слободан за супституцију место x у формули φ:*

$$\models \forall x \varphi \rightarrow \varphi_t^x \quad \text{и} \quad \models \varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi.$$

Такође, ако се променљива y не јавља у формули φ, онда важи:

$$\models \forall x \varphi \leftrightarrow \forall y (\varphi_y^x) \quad \text{и} \quad \models \exists x \varphi \leftrightarrow \exists y (\varphi_y^x).$$

Доказ. Посматрајмо структуру $\mathfrak{A}$ и индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$. На основу Леме 7.3 имамо да важи:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A},\mathfrak{s}) \models (\forall x\varphi) &\Leftrightarrow \text{за свако } a \in A \text{ имамо } (\mathfrak{A},\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi \\ &\Rightarrow (\mathfrak{A},\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{s}}(t)]) \models \varphi \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A},\mathfrak{s}) \models \varphi^x_t.\end{aligned}$$

Приметимо да други део првог тврђења следи, на основу контрапозиције, када први део тврђења применимо на формулу $\neg\varphi$.

Други део другог тврђења можемо да докажемо на следећи начин. Посматрајмо опет произвољну структуру $\mathfrak{A}$ и индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A},\mathfrak{s}) \models \exists y(\varphi^x_y) &\Leftrightarrow \text{ за неко } a \in A \text{ имамо } (\mathfrak{A},\mathfrak{s}[y \rightsquigarrow a]) \models \varphi^x_y \\ &\Leftrightarrow \quad -\shortparallel- \quad (\mathfrak{A},(\mathfrak{s}[y \rightsquigarrow a])[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi \\ &\Leftrightarrow \quad -\shortparallel- \quad (\mathfrak{A},\mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi \\ &\Leftrightarrow \quad -\shortparallel- \quad (\mathfrak{A},\mathfrak{s}) \models \exists x\varphi.\end{aligned}$$

Приметимо само да са првог на други ред можемо да пређемо на основу Леме 7.3, док је прелазак са другог на трећи ред оправдан тиме што се променљива y не јавља у φ. Случај који се тиче универзалног квантификатора се доказује аналогно овом. $\dashv$

Парове формула $\forall x\varphi$ и $\forall y(\varphi^x_y)$ као и $\exists x\varphi$ и $\exists y(\varphi^x_y)$ (под условом који се тиче променљиве y из претходног тврђења), зовемо *алфабетским варијантама*. Следеће тврђење и лема која му следи су једноставна последица дефиниције терма t који је слободан за супституцију место x у формули φ.

Тврђење 7.3.1. За сваку формулу φ, различите променљиве x и y такве да се y не јавља у φ и терм t језика $\mathscr{L}$ важи да, ако је t слободан за супституцију место x у φ, онда је t слободан за супституцију место y у φ^x_y.

Доказ. Доказујемо индукцијом по сложености формуле φ. Ако је формула φ атомска, онда је атомска и формула φ^x_y, па је сваки терм слободан за супституцију место сваке променљиве у φ^x_y.

Ако је формула φ облика $\neg\psi$, претпоставимо да се y не јавља у φ и да је t слободан за супституцију место x у φ. Онда имамо да се y не јавља у ψ и да је t слободан за супституцију место x у ψ. Међутим, онда на основу индуктивне хипотезе можемо да закључимо да је t слободан за супституцију место y у ψ^x_y. Онда је терм t слободан за супституцију место y у $\neg\psi^x_y$, а ова последња формула је исто што и φ^x_y. Случај када је формула φ облика импликације доказује се аналогно овом.

На крају, узмимо да је формула φ облика $\forall z\psi$ и претпоставимо да се променљива y не јавља у φ као и да је t слободан за супституцију место x у φ. Разликоваћемо два случаја. Прво, ако $x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$, онда је $\varphi^x_y = \varphi$ па имамо да $y \notin \mathsf{FV}(\varphi^x_y)$. Дакле, терм t је напразно слободан за супституцију место y у φ^x_y. Узмимо сада да је $x \in \mathsf{FV}(\varphi)$. Онда је терм t слободан за супституцију место x у ψ и променљива z се не јавља у t. Пошто је ψ потформула од φ, следи да се променљива y не јавља ни у ψ. Онда, на основу индуктивне хипотезе можемо да закључимо да је t слободан за супституцију место y у ψ^x_y, што повлачи да је t слободан за супституцију место y у φ^x_y. $\dashv$

Лема 7.4. *За сваку формулу φ, променљиву x и терм $t = t(x)$, имамо да је t слободан за супституцију место x у φ.*

Доказ. Ако је терм t затворен, тј. нема јављања променљивих у t, онда је t увек слободан за супституцију место x у φ. Ако се променљива x јавља у t, онда је t слободан за супституцију место x у φ јер ниједно јављање променљиве x из t не може након супституције да постане везано (зато што супституишемо само место слободних јављања променљиве x у формули φ). $\dashv$

Последица 7.0.2. *За сваку формулу φ, променљиву x и симбол константе c:*

$$\models \forall x\varphi \to \varphi, \qquad \models \forall x\varphi \to \varphi^x_{\mathsf{c}},$$

као и

$$\models \varphi \to \exists x\varphi, \qquad \models \varphi^x_{\mathsf{c}} \to \exists x\varphi.$$

Доказ. Ово је последица првог дела Тврђења 7.2 и напомена које смо изнели у доказу Леме 7.4. Наиме, ако је $t = \mathsf{c}$, онда је t увек слободан за супституцију место x у φ. Такође, ако је $t = x$, онда је t опет слободан за супституцију место x у φ и имамо да је $\varphi^x_x = \varphi$. $\dashv$

Тврђење 7.3. *За сваки скуп формула Γ језика $\mathscr{L}$, формуле ψ, σ и променљиву x такву да је $x \notin \mathsf{FV}(\sigma)$ и $x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$, за свако $\varphi \in \Gamma$:*

$$\Gamma \models \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \forall x\psi,$$

као и

$$\Gamma \models \psi \to \sigma \Leftrightarrow \Gamma \models \exists x\psi \to \sigma.$$

Доказ. Доказ првог тврђења, здесна на лево, следи на основу претходног тврђења, пошто је $\models \forall x\psi \to \psi$. Да бисмо доказали тврђење с лева на десно, претпоставимо да је $\Gamma \models \psi$. Посматрајмо структуру $\mathfrak{A}$ и индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$ такве да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \Gamma$. Онда ћемо, за свако $\varphi \in \Gamma$ и свако $a \in A$ имати да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \varphi$. Дакле, имамо да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow a]) \models \psi$. Међутим, пошто је $a \in A$ било произвољно, следи да је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\psi$.

Друго се тврђење доказује слично. С лева на десно, претпоставимо да важи $\Gamma \models \psi \to \sigma$. Из овога следи да је $\Gamma \cup \{\psi\} \models \sigma$. На основу контрапозиције имамо $\Gamma \cup \{\neg\sigma\} \models \neg\psi$. Пошто се x не јавља слободно у формулама из $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$, на основу претходног тврђења имамо $\Gamma \cup \{\neg\sigma\} \models \forall x\neg\psi$. Поново, на основу контрапозиције $\Gamma \cup \{\neg\forall x\neg\psi\} \models \sigma$. Дакле, $\Gamma \models \neg\forall x\neg\psi \to \sigma$, тј. $\Gamma \models \exists x\psi \to \sigma$. Импликација здесна на лево се доказује слично претходној. $\dashv$

Пренексна нормална форма. Присетимо се да за формуле φ и ψ језика $\mathscr{L}$ кажемо да су логички еквивалентне, што записујемо као $\varphi \sim \psi$, ако је свака од њих семантичка последица оне друге, тј. $\varphi \models \psi$ и $\psi \models \varphi$. Дакле, за такве формуле имамо да важи, за сваку структуру $\mathfrak{A}$ језика $\mathscr{L}$ и сваку индивидуалну валуацију $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi.$$

Дефиниција 7.4. За формулу кажемо да се налази у *пренексној нормалној форми*, ако је облика

$$Q_1x_1 \dots Q_nx_n\varphi,$$

где су $x_1, \dots, x_n$ различите променљиве, свако $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, за $1 \leq i \leq n$ и φ је формула без квантификатора. За

$$Q_1x_1 \dots Q_nx_n$$

кажемо да је *квантификаторски префикс* а φ *матрица* те формуле.

Сада ћемо да покажемо да за сваку формулу φ језика првог реда $\mathscr{L}$ можемо да нађемо њој еквивалентну која се налази у пренексној нормалној форми.

Теорема 7.1. *За сваку формулу φ језика првог реда $\mathscr{L}$ постоји формула φ' истог језика која се налази у пренексној нормалној форми и која је таква да важи $\varphi \sim \varphi'$.*

Доказ. Тврђење ћемо да докажемо индукцијом по сложености формуле φ. Да бисмо поједноставили нотацију, узимаћемо да је Q' егзистенцијални квантификатор ако је Q универзални квантификатор, и обрнуто. Ако је φ атомска формула, онда се она већ налази у пренексној нормалној форми. Претпоставимо сада, као индуктивну хипотезу да тврђење важи за формуле φ_1 и φ_2. Рецимо да важи:

$$\varphi_1 \sim Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \psi_1$$

као и

$$\varphi_2 \sim Q_{m+1} y_1 \dots Q_{m+n} y_n \psi_2,$$

где су сви $Q_1, \dots, Q_m, \dots, Q_{m+n} \in \{\exists, \forall\}$, $x_1, \dots, x_m$ су различите променљиве као и $y_1, \dots, y_n$ а формуле ψ_1 и ψ_2 не садрже квантификаторе. Ако је формула φ облика $\neg\varphi_1$, онда имамо да је:

$$\varphi \sim \neg Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \psi_1.$$

Сада, примењујући m пута Де Моргганове законе из првог реда Табеле 2, имамо да је:

$$\neg Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \psi_1 \sim Q'_1 x_1 \dots Q'_m x_m \neg\psi_1,$$

па следи да је

$$\varphi \sim Q'_1 x_1 \dots Q'_m x_m \neg\psi_1.$$

Ако сада узмемо да је φ облика $\varphi_1 \to \varphi_2$, онда на основу индуктивне хипотезе можемо да закључимо да је

$$\varphi \sim (Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \psi_1) \to (Q_{m+1} y_1 \dots Q_{m+n} y_n \psi_2).$$

Ако сада формулу $Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \psi_1$ заменимо њеном алфабетском варијантом, на основу Тврђења 7.2, можемо да постигнемо то да су скупови $\{x_1, \dots, x_m\}$ и $\{y_1, \dots, y_n\}$ дисјунктни и да се ниједна од променљивих x_i, за $1 \leq i \leq m$ не јавља слободно у ψ_2. Слично томе, и формулу

$$Q_{m+1} y_1 \dots Q_{m+n} y_n \psi_2$$

можемо да заменимо њеном алфабетском варијантом и да тако добијемо да се ниједна од променљивих y_j, за $1 \leq j \leq n$, не јавља слободно у ψ_1. Када то урадимо, можемо да $m+n$ пута применимо правила пасажа из шестог и седмог реда Табеле 2 одозго, да бисмо добили да је:

$$\begin{aligned}(Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \psi_1) \to (Q_{m+1} y_1 \dots Q_{m+n} y_n \psi_2) \sim \\ Q'_1 x_1 \dots Q'_m x_m Q_{m+1} y_1 \dots Q_{m+n} y_n (\psi_1 \to \psi_2).\end{aligned}$$

Дакле, имамо да је

$$\varphi \sim Q'_1 x_1 \dots Q'_m x_m Q_{m+1} y_1 \dots Q_{m+n} y_n (\psi_1 \to \psi_2).$$

На крају, ако узмемо да је φ облика $\forall x \varphi_1$, могућом заменом формуле

$$Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \psi_1$$

њеном алфабетском варијантом, можемо да постигнемо да је променљива x различита од свих променљивих $x_1, \dots, x_m$. Дакле, имамо да је:

$$\varphi \sim \forall x Q_1 x_1 \dots Q_m x_m \psi_1,$$

а ова се последња формула налази у пренексној нормалној форми. $\dashv$

8. Формални систем логике првог реда

Већ смо увели појам семантичке последице $\models$ логике првог реда. То је једна половина појма логичке последице. Другу половину чини појам доказивости који ћемо, као и у случају исказне логике, да означавамо са $\Gamma \vdash \varphi$. Овај појам може да се дефинише на више међусобно еквивалентних начина. Дефиниција појма $\vdash$ коју ћемо овде да дамо у складу је са оним што смо имали у исказној логици.

Формални систем $\mathscr{H}_P$. Претпостављамо, као и у случају исказне логике, да су једини примитивни везници нашег језика $\neg$ и $\to$. Формални систем за логику првог реда који ћемо да означавамо са $\mathscr{H}_P$, састоји се из следећег:

Дефиниција 8.1. *Логичке аксиоме* за дати језик првог реда $\mathscr{L}$ су генерализације (в. Дефиниција 5.8) свих формула следећег облика:

($\mathbf{A_1}$) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
($\mathbf{A_2}$) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$
($\mathbf{A_3}$) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$
($\mathbf{A_4}$) $\forall x\varphi \to \varphi^x_t$, ако је t слободан за супституцију место x у формули φ
($\mathbf{A_5}$) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
($\mathbf{A_6}$) $\varphi \to \forall x\varphi$, ако $x \notin \mathsf{FV}(\varphi)$
($\mathbf{A_7}$) $x = x$
($\mathbf{A_8}$) $(x_i = x_j) \to (\varphi \to \varphi')$, где је φ атомско и φ' је резултат замене неких, не нужно свих, јављања од x_i са x_j

Као и у случају формалног система за исказну логику, једино правило извођења у $\mathscr{H}_P$ биће модус поненс (**MP**):

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Опет, баш као и у случају исказне логике имамо следећу дефиницију:

Дефиниција 8.2. За скуп формула Γ и формулу φ језика првог реда $\mathscr{L}$, *доказ формуле φ из скупа хипотеза* Γ је коначан низ формула $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ такав да је $\varphi_n = \varphi$ и за свако $i < n$ важи једно од следећег:

(1) φ_i је аксиома,
(2) $\varphi_i \in \Gamma$,
(3) за неко $j, k < i$ имамо да је $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$.

Пишемо $\Gamma \vdash A$ (што читамо као Γ *доказује* φ, или пак φ је *синтактичка последица* од Γ) ако постоји доказ формуле φ из скупа хипотеза Γ. Доказе из хипотеза ћемо, као и у исказном случају, да зовемо *дедукцијама* или *извођењима из* Γ. За формулу φ кажемо да је *теорема* ако важи $\emptyset \vdash \varphi$, тј. ако је она синтактичка последица празног скупа хипотеза. То ћемо скраћено записивати као $\vdash \varphi$.

Следећи резултат је сасвим једноставна последица ове наше дефиниције.

Последица 8.0.1. *Нека је Γ скуп формула језика првог реда $\mathscr{L}$. Онда имамо:*

(1) за свако $\varphi \in \Gamma$ важи $\Gamma \vdash \varphi$,
(2) за сваку аксиому θ формалног система $\mathscr{H}_P$ важи $\Gamma \vdash \theta$,
(3) Ако је $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash \varphi$, онда важи и $\Delta \vdash \varphi$.

Задатак 8.1. *Доказати претходно тврђење.*

Пример 8.1. Приметимо прво да ако имамо да је $\vdash \varphi$, онда је $\vdash \forall x\varphi$, за произвољну променљиву x. Дакле, ако је формула ψ генерализација неке теореме, онда важи $\vdash \psi$. Да бисмо видели да ово важи, узмимо да је

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$$

доказ од φ из празног скупа хипотеза. Тврдимо да за свако $i = 1, \ldots, n$ имамо да важи $\vdash \forall x\varphi_i$, па тако и $\vdash \forall x\varphi_n$, тј. $\vdash \forall x\varphi$.

Ако је $i = 1$, онда је φ_1 једна од наших логичких аксиома, па је по дефиницији то и $\forall x\varphi_1$. Дакле, $\vdash \forall x\varphi_1$. Претпоставимо сада да тврђење важи за свако $j < i$ и посматрајмо формулу φ_i. Ако је φ_i једна од аксиома, онда имамо исто као и у првом случају. У супротном, φ_i је последица примене правила **MP** на формуле φ_j и φ_k које јој у низу претходе и где је φ_k облика $\varphi_j \to \varphi_i$. На основу индуктивне хипотезе имамо да важи $\vdash \forall x\varphi_j$ као и $\vdash \forall x(\varphi_j \to \varphi_i)$. Са друге стране, на основу $\mathbf{A_5}$ имамо да је

$$\vdash \forall x(\varphi_j \to \varphi_i) \to (\forall x\varphi_j \to \forall x\varphi_i),$$

па након што два пута применимо **MP** добијамо да је $\vdash \forall x\varphi_i$.

Следећи резултат нам у најкраћем каже да су наши докази коначни објекти:

Тврђење 8.2.1. Нека је Γ скуп формула језика првог реда $\mathscr{L}$. Онда ћемо имати да важи $\Gamma \vdash \varphi$ ако и само ако $\Gamma_0 \vdash \varphi$ за неки коначан подскуп $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Доказ. Приметимо да сваки корак у нашим доказима формула из скупа хипотеза Γ користи највише две формуле из тог скупа, а таквих корака има само коначно много.

Другим речима, нека је

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

доказ формуле $\varphi = \varphi_n$ из скупа хипотеза Γ. Ако је Γ коначан тврђење тривијално следи. Претпоставимо онда да је Γ бесконачан и да је $\psi_0 \in \Gamma$ произвољан елемент овог скупа. За свако $i \leq n$ узећемо по једну формулу ψ_i из Γ на следећи начин:

(1) ако је $\varphi_i \in \Gamma$, онда је $\psi_i = \varphi_i$,

(2) ако $\varphi_i \notin \Gamma$, онда је $\psi_i = \psi_0$.

Ако је (2) случај, онда је φ_i једна од наших логичких аксиома или последица примене правила **MP** на две формуле које јој у низу претходе. Дакле, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ је доказ формуле φ из скупа хипотеза $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. $\dashv$

Централни резултат логике првог реда је *Теорема потпуности* (у ширем смислу), чији ћемо доказ дати нешто касније:

Теорема 8.1. *За сваки језик првог реда $\mathscr{L}$, скуп формула Γ и формулу φ, имамо да важи $\Gamma \vdash \varphi$ ако и само ако $\Gamma \models \varphi$.*

Као и у исказном случају, импликацију с лева на десно у претходном тврђењу зваћемо *Теоремом ваљаности*, док ћемо њен обрат да зовемо просто *Теоремом потпуности* логике првог реда.

Формални систем $\mathscr{H}_P$ који смо овде дали није једини, као што није једини био ни формални систем исказне логике $\mathscr{H}_I$ који смо дали раније. Он је такав да можемо једноставно за њега да докажемо теорему потпуности, док су неки други, исто тако потпуни формални системи, много примеренији ако нас занима структура дедукција у логици првог реда. Још једно важно својство формалних система, које и наш систем поседује, јесте да је појам *d је дедукција од φ из Γ* рекурзиван, за рекурзивно Γ. Овај ћемо важан појам да дефинишемо у другом делу ове књиге и он ће нам бити значајан за доказ Геделових теорема о непотпуности и сродних резултата.

Неке једноставне особине система $\mathscr{H}_P$. Сада ћемо да докажемо нека једноставна својства која релација $\vdash$ поседује и која сасвим наликују онима која смо имали у исказној логици. Докази су као и у случају исказне логике и нећемо их овде понављати.

Лема 8.1 (Теорема дедукције). *Ако је* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, *онда* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

За скуп формула Γ језика првог реда $\mathscr{L}$ кажемо да је *инконзистентан*, баш као и у случају исказне логике (в. Дефиницију 3.3), ако постоји формула ψ језика $\mathscr{L}$ таква да важи $\Gamma \vdash \psi$ и $\Gamma \vdash \neg\psi$. Иначе кажемо да је Γ *конзистентан*.

Теорема 8.2. *Нека су* Γ *и* Δ *скупови формула и* $\varphi, \psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *формуле. Онда важи следеће:*

(1) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ *акко* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.
(2) $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$ *акко* $\Gamma \vdash \varphi_1 \to (\ldots \to (\varphi_n \to \psi)\ldots)$.
(3) Γ *је конзистентан акко постоји формула* σ *таква да важи* $\Gamma \nvdash \sigma$.
(4) Ако $\Gamma \vdash \sigma$ *за свако* $\sigma \in \Delta$ *и* $\Delta \vdash \psi$, *онда* $\Gamma \vdash \psi$.

Доказ је баш као и у исказном случају. Исто важи и за доказ следеће леме.

Лема 8.2. *Нека је* Γ *скуп формула и* φ *формула. Онда важи:*

(1) ако је $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *инконзистентан, онда* $\Gamma \vdash \varphi$;
(2) ако је $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *инконзистентан, онда* $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Приметимо само да су, као и у исказном случају, аксиоме $\mathbf{A_1}$ – $\mathbf{A_3}$ довољне да покажемо да важи $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ и $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ (в. Лему 3.1). Дакле, тврђења (1) и (2) горе једноставно следе једно из другога.

Управо смо се позвали на чињеницу да је свака формула облика $\varphi \to \neg\neg\varphi$, за произвољну формулу φ језика првог реда $\mathscr{L}$, теорема система $\mathscr{H}_P$. То је зато што је свака формула језика исказне логике која има тај облик таутологија. На основу *Теореме потпуности* (3.6) исказне логике следи да је та формула доказива у $\mathscr{H}_I$. Ако је формула φ језика првог реда $\mathscr{L}$ инстанца (в. Дефиницију 5.7 и Пример 5.1) неке таутологије ψ и у доказу за ψ заменимо јављање сваког исказног слова q_i одговарајућом формулом φ_i језика $\mathscr{L}$ – исто онако како смо са ψ прешли на φ – онда ће низ формула који добијамо на тај начин да буде доказ формуле φ у формалном систему $\mathscr{H}_P$ из празног скупа хипотеза (свако исказно слово које се јавља у доказу од ψ у $\mathscr{H}_I$ а не јавља се у формули ψ можемо да заменимо произвољном формулом језика првог реда

$\mathscr{L}$). У том доказу се служимо само аксиомама $\mathbf{A_1}-\mathbf{A_3}$ и правилом **MP**. Имамо дакле следеће тврђење:

Теорема 8.3. *Свака таутолошка инстанца је теорема логике првог реда.*

Ову теорему можемо да докажемо и директно, не позивајући се на Теорему 3.6. Међутим, само на основу природе тврђења које треба доказати читалац може да претпостави да ћемо на неки облик теореме потпуности исказне логике у том доказу морати да се позовемо. Доказ који ћемо сада да дамо ослања се на тврђење познато као *Калмарова лема*, у нешто друкчијем руху. Тај се резултат тиче исказне логике и тамо може да нам послужи да бисмо доказали следећу, нешто слабију варијанту теореме потпуности: ако је формула ψ таутологија, онда је она теорема система $\mathscr{H}_I$. Погледајмо сада како би доказ нашег тврђења који почива на *Калмаровој леми* могао да изгледа.

Доказ. Узмимо прво да је формула φ језика првог реда $\mathscr{L}$ инстанца исказне формуле ψ у којој се од исказних слова јављају само $q_1, \ldots, q_n$ и која је настала заменом јављања сваког исказног слова q_i, за $i = 1, \ldots, n$, формулом φ_i. За сваку основну валуацију $v_b : \mathscr{P} \to \{0, 1\}$ дефинишимо:

$$\varphi_i' = \begin{cases} \varphi_i, & \text{ако је } v_b(q_i) = 1, \\ \neg\varphi_i, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Такође, узмимо да је

$$\varphi' = \begin{cases} \varphi, & \text{ако је } v(\varphi) = 1, \\ \neg\varphi, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тврђење 8.1. $\Gamma = \{\varphi_1', \ldots, \varphi_n'\} \vdash \varphi'$.

Доказ Тврђења 8.1. Индукцијом по сложености формуле ψ. Ако је формула ψ исказно слово, онда тврђење тривијално следи.

Ако је $\psi = \neg\theta$, онда имамо да је формула φ облика $\neg\sigma$. Онда ће важити следеће:

$$\sigma' = \begin{cases} \sigma, & \text{ако је } v(\theta) = 1, \\ \neg\sigma, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На основу индуктивне хипотезе онда имамо да је $\Gamma \vdash \sigma'$. Ако је $v(\theta) = 0$, онда је $\sigma' = \neg\sigma = \varphi'$, па је $\Gamma \vdash \varphi'$. Са друге стране, ако је $v(\theta) = 1$, онда је $\sigma' = \sigma$ па је $\varphi' = \neg\varphi = \neg\neg\sigma$. Пошто имамо да $\Gamma \vdash \sigma'$ и знамо да је $\vdash \sigma \to \neg\neg\sigma$, на основу **MP** следи да је $\Gamma \vdash \varphi'$.

Узмимо сада да је $\psi = \theta_1 \to \theta_2$. Онда је формула φ облика $\sigma_1 \to \sigma_2$. На основу индуктивне хипотезе имамо да је $\Gamma \vdash \sigma_1'$ као и $\Gamma \vdash \sigma_2'$. Пошто важи

$$\sigma_j' = \begin{cases} \sigma_j, & \text{ако је } v(\theta_j) = 1, \\ \neg\sigma_j, & \text{иначе.} \end{cases}$$

за $j \in \{1, 2\}$, можемо да разликујемо неколико случајева.

Ако је $v(\theta_1) = 0$, онда ћемо имати да $\Gamma \vdash \neg\sigma_1$ и на основу $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ (в. Теорему 3.3 (1)) следи да је

$$\vdash \neg\sigma_1 \to (\sigma_1 \to \sigma_2).$$

Дакле, $\Gamma \vdash \sigma_1 \to \sigma_2$. Међутим, пошто је $v(\theta_1) = 0$, следи да је $v(\psi) = 1$ па је и $\varphi' = \varphi = \sigma_1 \to \sigma_2$. То нам даје $\Gamma \vdash \varphi'$.

Ако је $v(\theta_2) = 1$, онда је опет φ' облика $\sigma_1 \to \sigma_2$, формула σ_2' је σ_2 и важи $\Gamma \vdash \sigma_2$ на основу индуктивне хипотезе. Међутим, $\vdash \sigma_2 \to (\sigma_1 \to \sigma_2)$ је инстанца од $\mathbf{A_1}$, па на основу **MP** имамо $\Gamma \vdash \sigma_1 \to \sigma_2$, тј. $\Gamma \vdash \varphi'$.

Ако је $v(\theta_1) = 1$ и $v(\theta_2) = 0$, онда је φ' облика $\neg\varphi$, формула σ_1' је σ_1 и формула σ_2' је $\neg\sigma_2$. На основу индуктивне хипотезе онда ћемо имати да је $\Gamma \vdash \sigma_1$ и $\Gamma \vdash \neg\sigma_2$. На основу

$$\vdash \sigma_1 \to (\neg\sigma_2 \to \neg(\sigma_1 \to \sigma_2))$$

(в. Теорему 3.3 (4)) и две примене правила **MP** следи да је $\Gamma \vdash \neg(\sigma_1 \to \sigma_2)$, тј. $\Gamma \vdash \varphi'$. $\dashv$

Узмимо сада да је φ таутолошка инстанца од ψ, где φ настаје из ψ као што смо раније описали. Онда ћемо имати да је $\varphi' = \varphi$, пошто је формула ψ таутологија. Такође, ако је $v_b(p_n) = 1$, онда је $\varphi_n' = \varphi_n$ па је

$$\{\varphi_1', \ldots, \varphi_{n-1}', \varphi_n\} \vdash \varphi,$$

на основу тврђења које смо управо доказали. Из тога на основу *Теореме дедукције* (8.1) следи

$$\{\varphi_1', \ldots, \varphi_{n-1}'\} \vdash \varphi_n \to \varphi.$$

Са друге стране, ако је $v_b(p_n) = 0$, онда је $\varphi_n' = \neg\varphi_n$ па је

$$\{\varphi_1', \ldots, \varphi_{n-1}'\} \vdash \neg\varphi_n \to \varphi.$$

Међутим, на основу теореме (в. Теорема 3.3 (5))

$$\vdash (\varphi_n \to \varphi) \to ((\neg\varphi_n \to \varphi) \to \varphi),$$

то φ_n можемо да елиминишемо применом правила **MP**. Након што ово поновимо још $(n-1)-$пута можемо да закључимо да је $\vdash \varphi$. $\dashv$

Идеја на којој почива следећа лема којом ћемо често да се служимо у наставку јесте да, ако смо из хипотеза Γ успели да дедукујемо да x има неко својство φ и то x је било *произвољно*, онда *сваки* објект x има поменуто својство.

Лема 8.3 (Лема о генерализацији). *Ако је $\Gamma \vdash \varphi$ и x није слободно у Γ, онда је $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.*

Доказ. Доказујемо индукцијом по дужини доказа формуле φ из Γ. Ако је $\varphi \in \Gamma$, онда x није слободно у φ на основу претпоставке. На основу аксиоме **A6** имамо $\vdash \varphi \to \forall x\varphi$, па уз $\Gamma \vdash \varphi$ следи да је $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.

Ако је φ аксиома, онда је и $\forall x\varphi$ аксиома, пошто је скуп аксиома по дефиницији затворен за универзалну квантификацију.

Ако је φ закључак примене правила **MP** на формуле ψ и $\psi \to \varphi$, онда на основу индуктивне хипотезе имамо да је $\Gamma \vdash \forall x\psi$ и $\Gamma \vdash \forall x(\psi \to \varphi)$. На основу аксиоме **A5** имамо да је $\Gamma \vdash \forall x\psi \to \forall x\varphi$. Применом правила **MP** добијамо да је $\Gamma \vdash \forall x\varphi$. $\dashv$

Сада ћемо да дамо једну једноставну последицу претходног тврђења која ће нам користити у наставку.

Последица 8.3.1. *Ако је $\Gamma \vdash \varphi^x_z$, где променљива z није слободна у Γ и не јавља се у φ, онда је $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.*

Доказ. Приметимо прво да је, на основу Тврђења 7.3.1, x увек слободно за супституцију место z у φ^x_z када се променљива z не јавља у φ. Такође, знамо да је у том случају $(\varphi^x_z)^z_x = \varphi$, на основу Тврђења 7.2.1. Пошто $\Gamma \vdash \varphi^x_z$ и z није слободно у Γ, на основу *Леме о генерализацији* (8.3) имамо да је $\Gamma \vdash \forall z\varphi^x_z$.

Међутим, на основу напомене горе и аксиоме $\mathbf{A_4}$ имамо и $\forall z\varphi^x_z \vdash (\varphi^x_z)^z_x$, а из овога следи да је $\forall z\varphi^x_z \vdash \varphi$. Пошто x није слободно у $\forall z\varphi^x_z$, *Лема о генерализацији* (8.3) има за последицу да је $\forall z\varphi^x_z \vdash \forall x\varphi$, па је $\Gamma \vdash \forall x\varphi$. $\dashv$

Пример 8.2. $\forall x\forall y\varphi \vdash \forall y\forall x\varphi$.
Да бисмо видели да претходно важи, на основу *Леме о генерализацији* (8.3) довољно ће бити да покажемо следеће

$$\forall x\forall y\varphi \vdash \forall x\varphi,$$

а за ово је опет довољно, на основу истог резултата, да се покаже да

$$\forall x\forall y\varphi \vdash \varphi.$$

На основу $\mathbf{A_4}$ имамо да је

$$\vdash \forall x\forall y\varphi \to \forall y\varphi,$$

као и
$$\vdash \forall y\varphi \to \varphi.$$
Међутим, након што два пута применимо **MP** добијамо да је
$$\forall x\forall y\varphi \vdash \varphi.$$

Пример 8.3. $\vdash \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$.
На основу *Теореме дедукције* (8.1), довољно је показати да важи
$$\exists x\forall y\varphi \vdash \forall y\exists x\varphi,$$
а на основу *Леме о генерализацији* (8.3) да имамо следеће:
$$\exists x\forall y\varphi \vdash \exists x\varphi.$$
Међутим, пошто смо егзистенцијални квантификатор дефинисали помоћу универзалног, оно што заправо треба да покажемо јесте
$$\neg\forall x\neg\forall y\varphi \vdash \neg\forall x\neg\varphi.$$
Претходно ће да следи ако и само важи:
$$\forall x\neg\varphi \vdash \forall x\neg\forall y\varphi.$$
Поново, на основу *Леме о генерализацији* (8.3), за то ће бити довољно да покажемо да је
$$\forall x\neg\varphi \vdash \neg\forall y\varphi.$$

То ће пак да следи ако на основу Леме 8.2 покажемо да је скуп $\{\forall x\neg\varphi, \forall y\varphi\}$ инконзистентан. Међутим, $\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi$ и $\forall y\varphi \to \varphi$ су обе инстанце од $\mathbf{A_4}$, па применом правила **MP** једноставно видимо да је поменути скуп инконзистентан.

У доказу *Теореме потпуности* (9.1) уводићемо у наш језик неке нове индивидуалне константе. Следеће тврђење нам је потребно да бисмо те симболе могли да елиминишемо и вратимо се дедукцијама у нашем изворном језику.

Теорема 8.4 (Теорема о генерализацији по константама). *Нека је $\mathscr{L}$ језик првог реда. Ако је Γ скуп формула и $\varphi(x)$ формула од $\mathscr{L}$, а c симбол константе који се не јавља у $\mathscr{L}$, онда ако имамо да важи $\Gamma \vdash \varphi^x_{\mathsf{c}}$, важи такође и $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.*

Доказ. Пошто имамо да је $\Gamma \vdash \varphi^x_{\mathsf{c}}$, узмимо неки коначан подскуп $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такав да је $\Gamma_0 \vdash \varphi^x_{\mathsf{c}}$. Рецимо да имамо
$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k = \varphi^x_{\mathsf{c}}$$
дедукцију од φ^x_{c} из хипотеза Γ_0 у проширеном језику $\mathscr{L} \cup \{\mathsf{c}\}$. Узмимо сада да све формуле φ'_i, за $i = 1, \ldots, k$, добијамо супституцијом променљиве y место c у φ_i, где је y променљива која се не

јавља ни у Γ_0, нити у формулама φ_i и φ. Онда индукцијом једноставно можемо да покажемо да је $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_k = \varphi^x_y$ дедукција од φ^x_y из скупа хипотеза Γ_0 у језику $\mathscr{L}$ (Ако је φ'_i из Γ_0, онда је $\varphi'_i = \varphi_i$, јер се c не јавља у Γ. Ако је φ'_i закључак правила **MP**, тврђење опет лако следи. Једино где бисмо имали нешто посла јесте да проверимо да је φ'_i аксиома, ако је φ_i била једна од аксиома $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{A_6}$ или $\mathbf{A_8}$ у проширеном језику). Дакле, имамо да је

$$\Gamma_0 \vdash \varphi^x_y.$$

Пошто се променљива y не јавља у Γ_0, на основу *Леме о генерализацији* (8.3) следи да је

$$\Gamma_0 \vdash \forall y \varphi^x_y.$$

Међутим, x је слободно за супституцију место y у φ^x_y и имамо да је

$$(\varphi^x_y)^y_x = \varphi.$$

Дакле, имамо да је

$$\forall y \varphi^x_y \to \varphi,$$

инстанца од $\mathbf{A_4}$, па на основу правила **MP** следи

$$\forall y \varphi^x_y \vdash \varphi.$$

Поново, на основу *Леме о генерализацији* (8.3)

$$\forall y \varphi^x_y \vdash \forall x \varphi,$$

па на основу правила **MP** имамо да

$$\Gamma_0 \vdash \forall x \varphi,$$

и на крају

$$\Gamma \vdash \forall x \varphi.$$

$\dashv$

Пример 8.4. $\forall x \forall y \mathsf{R}xy \vdash \forall y \forall x \mathsf{R}xy$.
На основу претходне теореме, довољно ће бити да покажемо да важи

$$\forall x \forall y \mathsf{R}xy \vdash \forall x \mathsf{R}x\mathsf{d}$$

где је d индивидуална константа. Даље, за то ће бити довољно да се покаже

$$\forall x \forall y \mathsf{R}xy \vdash \mathsf{Rcd}$$

где је сада c индивидуална константа различита од d. Међутим, $\forall x \forall y \mathsf{R}xy \to \forall y \mathsf{Rc}y$, као и $\forall y \mathsf{Rc}y \to \mathsf{Rcd}$ су инстанце аксиоме $\mathbf{A_4}$, па након што два пута применимо **MP** можемо да закључимо $\forall x \forall y \mathsf{R}xy \vdash \mathsf{Rcd}$.

Последица 8.4.1. *Претпоставимо да је* $\Gamma \vdash \varphi^x_{\mathsf{c}}$*, где је* c *симбол константе који се не јавља ни у* Γ *нити у* φ*. Онда ћемо имати* $\Gamma \vdash \forall x\varphi$ *и притом се константа* c *не појављује у овој дедукцији.*

Доказ. На основу претходне теореме имамо да важи $\Gamma \vdash \forall y(\varphi^x_{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}_y$ за неку променљиву y која се не јавља у φ^x_{c}. Пошто се по претпоставци c не јавља у φ имамо да је

$$(\varphi^x_{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}_y = \varphi^x_y,$$

па следи да је $\Gamma \vdash \forall y\varphi^x_y$. Међутим, на основу Тврђења 7.2.1 следи да је $\forall y\varphi^x_y \to \varphi$ инстанца аксиоме $\mathbf{A_4}$, па имамо $\forall y\varphi^x_y \vdash \varphi$. Пошто се x не јавља слободно у $\forall y\varphi^x_y$, на основу *Леме о генерализацији* (8.3) следи да је $\forall y\varphi^x_y \vdash \forall x\varphi$. На основу *Теореме дедукције* (8.1) имамо да је

$$\vdash \forall y\varphi^x_y \to \forall x\varphi.$$

Пошто је $\Gamma \vdash \forall y\varphi^x_y$, следи да је и $\Gamma \vdash \forall x\varphi$. $\dashv$

Алфабетске варијанте. Присетимо се да смо после доказа Тврђења 7.2 неформално описали појам *алфабетске варијанте.* Сада ћемо тај појам прецизно да дефинишемо да бисмо могли да докажемо још један технички резултат који ће нам користити у доказу *Теореме потпуности* (9.1). Да бисмо то учинили, прво ћемо да дамо следећу прелиминарну дефиницију.

Дефиниција 8.3. Ако је φ формула језика $\mathscr{L}$, онда дефинишемо *непосредне алфабетске варијанте* од φ на следећи начин:

(1) Ако је φ атомско, онда је φ једина непосредна алфабетска варијанта од φ.
(2) Ако је φ облика $\neg\psi$, онда су непосредне алфабетске варијанте од φ формуле облика $\neg\psi'$, где је ψ' непосредна алфабетска варијанта од ψ.
(3) Ако је φ облика $\psi \to \sigma$, онда су непосредне алфабетске варијанте од φ формуле облика $\psi' \to \sigma'$, где је ψ' непосредна алфабетска варијанта од ψ а σ' непосредна алфабетска варијанта од σ.
(4) Ако је формула φ облика $\forall x\psi$, онда су непосредне алфабетске варијанте од φ формуле облика $\forall y(\psi')^x_y$, где је ψ' непосредна алфабетска варијанта од ψ, y је променљива која је слободна за супституцију место x у ψ' и која се не јавља слободно у $\forall x\psi$.

Сада можемо да дефинишемо релацију $\leftrightsquigarrow$ на скупу формула језика $\mathscr{L}$ као релацију еквиваленције која је генерисана релацијом непосредне алфабетске варијанте. Кажемо да је φ' *алфабетска варијанта* од φ и пишемо $\varphi \leftrightsquigarrow \varphi'$, ако постоји коначан низ формула $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ такав да је $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_n = \varphi'$ и за свако $i = 1, \ldots, n-1$ или је φ_{i+1} непосредна алфабетска варијанта од φ_i или је пак φ_i непосредна алфабетска варијанта од φ_{i+1}.

Пример 8.5. Приметимо да је формула $\forall y \forall u \mathsf{R} y u$ непосредна алфабетска варијанта формуле $\forall x \forall y \mathsf{R} x y$ док обрнуто није случај. Такође, имамо да важи $\forall x \forall y \mathsf{R} x y \leftrightsquigarrow \forall y \forall x \mathsf{R} y x$, али ниједна од ових формула није непосредна алфабетска варијанта оне друге.

Ако посматрамо формуле φ и φ' такве да важи $\varphi \leftrightsquigarrow \varphi'$, онда се оне једино разликују до на везана јављања променљивих у њима. Везана јављања неке променљиве у φ смо преименовали да бисмо добили везана јављања неке друге променљиве у φ'. Ако се нека променљива јављала слободно на $i-$том месту у формули φ, онда ће иста та променљива да се јавља слободно на истом том месту у формули φ'. Исто важи и за друге симболе нашег језика који нису променљиве.

Значај појма алфабетске варијанте огледа се у следећем. Посматрајмо произвољну формулу φ и променљиве $x_1, \ldots, x_n$. Увек можемо да нађемо алфабетску варијанту φ' формуле φ, такву да се променљиве $x_1, \ldots, x_n$ не јављају везано у φ'. Примера ради, ако формула φ има потформулу облика $\forall x_1 \psi$, онда ту потформулу можемо да заменимо формулом $\forall y \psi_y^{x_1}$ где се променљива y не јавља у формули ψ па је тако слободна за супституцију место x_1 у ψ и различита је од свих x_i, за $i = 1, \ldots, n$. После коначно много таквих трансформација добијамо формулу φ' која има тражено својство. Такође, ако је $t(x_1, \ldots, x_n)$ терм, онда ће t бити слободан за супституцију место x у φ'.

Лема 8.4 (Лема о алфабетским варијантама). *Нека је φ формула, x променљива и t терм језика првог реда $\mathscr{L}$. Онда постоји формула φ' са истим слободним променљивима као и φ, таква да је t слободан за супституцију место x у φ' и важи $\varphi \vdash \varphi'$ као и $\varphi' \vdash \varphi$.*

Доказ. Тврђење доказујемо индукцијом по сложености формуле φ. Ако је φ атомско, онда можемо да узмемо да је $\varphi' = \varphi$.

Ако је формула φ облика $\neg\psi$ или пак облика $\psi \to \sigma$, онда можемо да узмемо да су одговарајуће алфабетске варијанте облика $\neg\psi'$ односно $\psi' \to \sigma'$. Тврђење ће онда једноставно да следи на основу индуктивне хипотезе за формуле ψ и σ.

Претпоставимо онда да је $\varphi = \forall w\psi$ за неку променљиву w. Ако је $w = x$, онда можемо да узмемо да је $\varphi' = \varphi$, пошто x није слободно у φ у овом случају. Претпоставимо сада да је $w \neq x$. Посматрајмо формулу

$$\bar{\varphi} = \forall z \psi^w_z$$

где је z променљива која се не јавља ни у φ нити у t. Тврдимо да је $\varphi \vdash \bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi} \vdash \varphi$.

Да бисмо видели да важи $\varphi \vdash \bar{\varphi}$, на основу *Леме о генерализацији* (8.3) ће бити довољно да покажемо да је $\varphi \vdash \psi^w_z$, пошто z није слободно у φ. Зато што је z слободно за супституцију место w у φ (пошто се ова променљива не јавља у φ), на основу аксиоме $\mathbf{A_4}$, применом правила $\mathbf{MP}$, имамо да је $\varphi \vdash \psi^w_z$.

Са друге стране, да бисмо видели да важи и $\bar{\varphi} \vdash \varphi$, опет на основу *Леме о генерализацији* (8.3) биће довољно да покажемо да важи $\bar{\varphi} \vdash \psi$, пошто се w не јавља слободно у $\bar{\varphi}$. Будући да се z не јавља у ψ, сва јављања од z у ψ^w_z су слободна, и w је слободно за супституцију место z у ψ^w_z. Дакле, опет на основу аксиоме $\mathbf{A_4}$ следи да је

$$\bar{\varphi} \vdash (\psi^w_z)^z_w = \psi.$$

На крају, узмимо да је, на основу индуктивне хипотезе,

$$\varphi' = \forall z (\psi^w_z)'$$

где имамо да важи

$$(\psi^w_z)' \vdash \psi^w_z$$

као и

$$\psi^w_z \vdash (\psi^w_z)'$$

и где је t слободан за супституцију место x у $(\psi^w_z)'$. Пошто је t слободно за супституцију место x у $(\psi^w_z)'$ а променљива z се не јавља у t, следи да је t слободно за супституцију место x у $\forall z (\psi^w_z)' = \varphi'$. На основу *Леме о генерализацији* (8.3) онда следи да је

$$\forall z \psi^w_z \vdash \forall z (\psi^w_z)'$$

као и

$$\forall z (\psi^w_z)' \vdash \forall z \psi^w_z$$

што је и требало показати. $\dashv$

Теорема ваљаности. У следећем одељку ћемо да дамо доказ *Теореме потпуности* (9.1) логике првог реда. Сада, треба да покажемо да важи и обрат тог тврђења, тј. *Теорема ваљаности.*

Теорема 8.5 (Теорема ваљаности). *Нека је* Γ *скуп формула и* φ *формула језика* $\mathscr{L}$*. Онда имамо да важи:*

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi.$$

Доказ. Приметимо прво да смо већ показали да су све логичке аксиоме нашег формалног система $\mathscr{H}_P$ ваљане формуле.

Прво, на основу Напомене која следи Дефиницију 5.8 знамо да су све генерализације ваљаних формула такође ваљане формуле. Дакле, довољно ће бити да се утврди да су све оне аксиоме које нису генерализације ваљане формуле. За аксиоме $\mathbf{A_1} - \mathbf{A_3}$, то знамо на основу Тврђења 5.2, које се тицало таутолошких инстанци. Да је свака формула облика $\mathbf{A_4}$ ваљана знамо на основу Тврђења 7.2 које се тицало супституције. За аксиоме облика $\mathbf{A_5}$ то можемо да закључимо на основу Тврђења 5.4 и дела (1) Тврђења 5.6. За аксиоме облика $\mathbf{A_6}$ знамо да је то случај на основу парова логички еквивалентних формула из Табеле 2 (четврти ред). Да је аксиома $\mathbf{A_7}$ ваљана формула је једноставно да се види, јер за произвољну структуру $\mathfrak{A}$ и индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$ имамо да важи

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models x = x \Leftrightarrow \mathfrak{s}(x) = \mathfrak{s}(x),$$

где је десна страна еквиваленције горе увек тачна. На крају, аксиоме облика $\mathbf{A_8}$ су све ваљане формуле на основу Тврђења 7.1.

Сада можемо да покажемо да за сваку формулу φ важи да ако постоји дедукција од φ из скупа формула Γ, онда је φ семантичка последица од Γ. Ако је формула φ једна од аксиома, онда већ знамо да је $\models \varphi$, па је тиме и $\Gamma \models \varphi$. Ако је φ једна од формула из Γ, онда опет следи да $\Gamma \models \varphi$. Ако је формула φ добијена као закључак примене правила модус поненс на формуле ψ и $\psi \to \varphi$, које јој у дедукцији претходе, онда на основу индуктивне хипотезе знамо да $\Gamma \models \psi$ као и $\Gamma \models \psi \to \varphi$. Из овога пак једноставно следи да је $\Gamma \models \varphi$. ⊣

Сада ћемо да наведемо једну еквивалентну формулацију *Теореме ваљаности* чији ће нам обрат бити значајан у следећем одељку када будемо говорили о *Теореми потпуности* (9.1) логике првог реда.

Последица 8.5.1. *Нека је* Γ *скуп формула језика* $\mathscr{L}$. *Онда важи да ако је* Γ *задовољив, онда је* Γ *конзистентан.*

Доказ. Нека је Γ произвољан задовољив скуп формула језика $\mathscr{L}$. Посматрајмо структуру $\mathfrak{A}$ и индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$ такве да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \Gamma$ и претпоставимо да је Γ инконзистентан. Онда постоји формула φ таква да је $\Gamma \vdash \varphi$ и $\Gamma \vdash \neg\varphi$. На основу *Теореме ваљаности* (8.5) следи да је $\Gamma \models \varphi$ и $\Gamma \models \neg\varphi$, што је немогуће. Дакле, скуп Γ је конзистентан. $\dashv$

Последица коју смо управо доказали је, као што смо напоменули, еквивалентна *Теореми ваљаности* (8.5) одозго. Да бисмо видели да важи импликација и у супротном смеру, претпоставимо да $\Gamma \not\models \varphi$. Онда постоји структура $\mathfrak{A}$ и индивидуална валуација $\mathfrak{s}$ такви да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \Gamma$ и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \varphi$, тј. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \neg\varphi$. Дакле, скуп $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ је задовољив, па је на основу Последице 8.5.1 конзистентан. Из овога једноставно следи да $\Gamma \nvdash \varphi$.

9. Доказ теореме потпуности

У овом одељку ћемо да дамо доказ теореме потпуности логике првог реда. Као што смо већ споменули у Уводу, ову је важну теорему први доказао Гедел у својој докторској тези из 1929. године. Међутим, доказ који ћемо овде да дамо није Геделов. Њега дугујемо Леону Хенкину.

Нека је $\mathscr{L}$ језик логике првог реда, φ формула и Γ скуп формула овог језика. Претпоставимо да је $\Gamma \models \varphi$. Показаћемо да је $\Gamma \vdash \varphi$. Ако је $\Gamma \nvdash \varphi$, онда на основу Леме 8.2 имамо да је скуп $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ конзистентан. Ако будемо могли да покажемо да је сваки конзистентан скуп формула задовољив у некој структури $\mathfrak{A}$ за неку валуацију $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$, онда ће постојати структура $\mathfrak{A}$ и валуација $\mathfrak{s}$ који задовољавају $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Међутим, то је немогуће, пошто је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \Gamma$ а тиме и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi$.

На основу претходно реченог, довољно ће бити да докажемо следеће:

Теорема 9.1 (Теорема потпуности). *Ако је Γ конзистентан скуп формула језика првог реда $\mathscr{L}$, онда постоје структура $\mathfrak{A}$ и индивидуална валуација $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ такви да задовољавају Γ.*

Пре него што докажемо ову теорему неколико коментара је на месту. И у случају доказа *Теореме потпуности* (3.6) исказне логике требало је да урадимо нешто слично и ова два доказа у много чему један другом наликују. У исказном случају је такође требало показати да је сваки конзистентан скуп формула задовољив. Тамо смо, пошавши од произвољног конзистентног скупа формула Γ тај скуп проширили до максимално конзистентног скупа формула Γ_∞. Тај скуп је имао особину да за сваку формулу φ исказне логике важи $\varphi \in \Gamma_\infty$ или $\neg\varphi \in \Gamma_\infty$. То нам је онда омогућило да дефинишемо валуацију v такву да смо за свако $\varphi \in \Gamma_\infty$ имали да важи $v(\varphi) = 1$.

И у случају логике првог реда ћемо да урадимо нешто слично. Поћи ћемо од произвољног конзистентног скупа формула Γ језика $\mathscr{L}$ и тај ћемо скуп да проширимо до максимално конзистентног скупа формула Γ_∞, баш као и у исказном случају. Скуп Γ_∞ ће поново имати особину да за сваку формулу φ језика $\mathscr{L}$ имамо да важи $\varphi \in \Gamma_\infty$ или $\neg\varphi \in \Gamma_\infty$. Онда, да бисмо показали да је скуп Γ задовољив, довољно ће бити да покажемо да је скуп Γ_∞ задовољив. Дакле, очекујемо да ћемо морати да нађемо одговарајућу структуру $\mathfrak{A}$ језика $\mathscr{L}$ и индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$, такве да ће важити $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \Gamma_\infty$. Међутим, поставља се питање како ће таква једна структура да изгледа?

Пошто једино имамо на располагању скуп Γ_∞, могли бисмо да покушамо да структуру $\mathfrak{A}$ конструишемо од синтактичког материјала. Другим речима, можемо узети да је домен наше структуре $\mathfrak{A}$ једнак $\mathscr{T}$, скупу свих терама језика $\mathscr{L}$ и да су наши нелогички симболи интерпретирани на следећи начин:

(1) $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}} = \{(t_1, \dots, t_n) \in A^n \mid \mathsf{R}t_1 \dots t_n \in \Gamma_\infty\}$, за сваки $n-$арни симбол $\mathsf{R} \in \mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}$;
(2) $\mathsf{f}^{\mathfrak{A}}(t_1, \dots, t_n) = \mathsf{f}t_1 \dots t_n$, за сваки $n-$арни симбол $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$;
(3) $\mathsf{c}^{\mathfrak{A}} = \mathsf{c}$, за сваки симбол константе $\mathsf{c} \in \mathsf{Cns}^{\mathscr{L}}$.

На крају, могли бисмо да узмемо индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$ такву да важи $\mathfrak{s}(x) = x$, за свако $x \in \mathsf{V}$

Нажалост, ово напросто неће бити довољно. Да бисмо видели зашто је то случај, узмимо да је $\mathscr{L}_G = \{*, \boldsymbol{e}\}$ језик теорије група и Γ скуп аксиома те теорије које смо дали у Примеру 5.2. Ако је Γ_∞ максимално конзистентан скуп који шири Γ, онда ћемо имати да $(\boldsymbol{e} * \boldsymbol{e}) * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \in \Gamma_\infty$, јер $\Gamma \vdash (\boldsymbol{e} * \boldsymbol{e}) * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}$. Међутим, ови су терми различити као синтактички објекти, иако скуп Γ_∞ од нас тражи да их изједначимо. Ову ћемо препреку да решимо тиме што ћемо дефинисати једну релацију еквиваленције $\approx$ на скупу терама $\mathscr{T}$, тако што ћемо узети да је $t \approx s$ ако и само ако је случај да $t = s \in \Gamma_\infty$.

То међутим није све. Посматрајмо језик $\mathscr{L} = \{\mathsf{P}\}$, где је P унарни релацијски симбол. Нека је

$$\Gamma = \{\neg \mathsf{P}x \mid x \in \mathsf{V}\} \cup \{\neg(x = y) \mid x, y \in \mathsf{V} \text{ и } x \neq y\} \cup \{\exists x \mathsf{P}x\}.$$

Скуп Γ је задовољив у структури $\mathfrak{B}$ чији је домен $\mathbb{N}$, за индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}(x_n) = n + 1$ и интерпретацију $\mathsf{P}^{\mathfrak{B}} = \{0\}$. Узмимо сада да је Γ_∞ максимално конзистентан скуп који шири Γ. У структури $\mathfrak{A}$ коју смо описали горе, имаћемо да је $A = \mathscr{T} = \mathsf{V}$. Пошто је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \neg \mathsf{P}x$, за свако $x \in \mathsf{V}$, следи да $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \not\models \exists x \mathsf{P}x$. Дакле, $\mathfrak{A}$ није модел од Γ_∞.

Други проблем који треба да решимо је, дакле, тај што је скуп Γ_∞ садржао егзистенцијално тврђење, али сваки пут када бисмо ставили терм наместо квантификоване променљиве, формула коју бисмо тако добили није била у Γ_∞. Тај други проблем ћемо решити помоћу појма *сведока* или *Хенкинових константи*. Проширење почетног језика таквим константама смо већ наговестили у претходном одељку. Вратимо се сада доказу Теореме 9.1 одозго.

Доказ. Нека је $\mathscr{L}'$ добијен из језика $\mathscr{L}$ додавањем пребројиво много нових симбола константи c_i које се не јављају у $\mathscr{L}$.

Такође, нека су $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ све егзистенцијалне формуле од $\mathscr{L}'$, тј. све формуле облика $\varphi_i = \exists y_i \psi_i$, за неку променљиву y_i и формулу ψ_i. За сваку формулу φ_i узмимо једну од нових константи c_{φ_i} која се не јавља ни у φ_i нити у φ_j, нити је пак једнака некој од константи c_{φ_j}, за свако $j < i$.

Дакле, оно што смо овде урадили јесте да смо свакој егзистенцијалној формули $\varphi = \exists y \psi$ придружили један симбол константе c_φ. Нека је Γ' скуп формула добијен из скупа Γ придруживањем свих формула облика

$$\exists y \psi \to \psi(\mathsf{c}_\varphi),$$

за сваку егзистенцијалну формулу $\varphi = \exists y \psi$. Овде је $\psi(\mathsf{c}_\varphi)$ скраћеница за $\psi^y_{\mathsf{c}_\varphi}$. Ове нове формуле,

$$\sigma_i = \exists y_i \psi_i \to \psi_i(\mathsf{c}_{\varphi_i})$$

зовемо *Хенкиновим формулама*, а константе c_φ *сведоцима* или *Хенкиновим константама*. Дакле, имамо да је

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{\exists y_i \psi_i \to \psi_i(\mathsf{c}_{\varphi_i})\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Тврђење 9.0.1. Скуп Γ' је конзистентан.

Доказ. Ако Γ' није конзистентан, нека је n најмање такво да је скуп

$$\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}\}$$

инконзистентан. Приметимо да је скуп Γ и даље конзистентан у односу на језик $\mathscr{L}'$. То следи на основу *Теореме о генерализацији по константама* (8.4). Наиме, ако је $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}'} \phi$ и $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}'} \neg\phi$, где је ϕ формула језика $\mathscr{L}'$, онда на основу поменуте теореме можемо да заменимо нове симболе константи у ϕ (таквих ће бити само коначно много) променљивима да бисмо добили формулу ϕ' језика $\mathscr{L}$ и то такву да је $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \phi'$ и $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \neg\phi'$, што је супротно нашој претпоставци.

Дакле, скуп

$$\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$$

је конзистентан, док је скуп

$$\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}\}$$

инконзистентан. Нека је

$$\sigma_{n+1} = \exists y \psi \to \psi(\mathsf{c}_\varphi),$$

где је $\varphi = \exists y\psi$. Дакле, c_φ се не јавља у φ нити у $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. На основу Леме 8.2, следи да је

$$\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \neg\sigma_{n+1}.$$

Међутим, за произвољне формуле ϕ и θ једноставно можемо да видимо да важи $\neg\phi \vdash \phi \to \theta$, на основу *Теореме дедукције* (8.1) из $\{\neg\phi, \phi\} \vdash \theta$, па је $\neg(\phi \to \theta) \vdash \phi$ на основу Леме 8.2. Дакле,

$$\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \exists y\psi.$$

Такође, $\neg(\phi \to \theta) \vdash \neg\theta$ следи на основу Леме 8.2 пошто је $\theta \vdash \phi \to \theta$, на основу $\mathbf{A_1}$. Имамо, дакле, да је и

$$\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \neg\psi(\mathsf{c}_\varphi).$$

Пошто се c_φ не јавља у $\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, на основу *Теореме о генерализацији по константама* (8.4) имамо да је

$$\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \forall z \neg(\psi^y_{\mathsf{c}_\varphi})^{\mathsf{c}_\varphi}_z.$$

за неку промењиву z (за коју можемо да претпоставимо да се не јавља у φ), још приде c_φ се не јавља у овој дедукцији. Пошто се c_φ не јавља у ψ, имамо да је (в. Тврђење 7.2.1)

$$(\psi^y_{\mathsf{c}_\varphi})^{\mathsf{c}_\varphi}_z = \psi^y_z.$$

Дакле, следи да важи

$$\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \forall z \neg\psi^y_z.$$

Пошто се z не јавља у ψ, z се јавља слободно у ψ^y_z тачно на местима где се промењива y јављала слободно у ψ, и y је слободно за супституцију место z у ψ^y_z. На основу аксиоме $\mathbf{A_4}$ имамо

$$\forall z \neg\psi^y_z \to \neg(\psi^y_z)^z_y.$$

Међутим, $(\psi^y_z)^z_y = \psi$, па је

$$\forall z \neg\psi^y_z \vdash \neg\psi.$$

Пошто y није слободно у $\forall z \neg\psi^y_z$, на основу *Леме о генерализацији* (8.3) следи да је $\forall z \neg\psi^y_z \vdash \forall y \neg\psi$. Дакле,

$$\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \forall y \neg\psi.$$

Међутим, пошто $\Gamma \vdash \exists y\psi$, тј. $\Gamma \vdash \neg\forall y \neg\psi$, видимо да је $\Gamma \cup \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ инконзистентан, што противречи минималности од n или пак конзистентности од Γ, у случају да је $n = 0$. $\dashv$

Сада треба да скуп Γ' проширимо до максимално конзистентног скупа формула језика $\mathscr{L}'$ који ћемо да означавамо са Γ_∞. Ово чинимо на исти начин као и у случају исказне логике.

Ако је језик $\mathscr{L}$ пребројив, онда је и језик $\mathscr{L}'$ такође пребројив, па можемо да побројимо све формуле језика $\mathscr{L}'$ следећим низом

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

Узмимо да је $\Gamma_0 = \Gamma'$ и онда дефинишимо рекурзивно:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\},$$

ако је овај скуп конзистентан. Ако је пак овај скуп инконзистентан, онда на основу Леме 8.2 имамо да $\Gamma_n \vdash \neg\varphi_{n+1}$ па можемо да узмемо да је у том случају $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}$. Онда ћемо имати да је

$$\Gamma_\infty = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$$

максимално конзистентан скуп. Ако је језик $\mathscr{L}$, па самим тим и језик $\mathscr{L}'$, непребројив, онда користимо аксиому избора да бисмо добро уредили формуле тог језика и користимо исти аргумент као и горе, где у граничним нивоима конструкције узимамо уније претходних нивоа.

Као и у доказу у случају исказне логике, максималност скупа Γ_∞ заједно са Лемом 8.2, има за последицу да за сваку формулу φ језика $\mathscr{L}'$ важи тачно једно од следећег: $\varphi \in \Gamma_\infty$ или $\neg\varphi \in \Gamma_\infty$. Такође, ако је $\Gamma_\infty \vdash \varphi$, онда $\varphi \in \Gamma_\infty$, па је овај скуп и дедуктивно затворен (иначе, ако $\Gamma_\infty \vdash \varphi$ и $\varphi \notin \Gamma_\infty$, онда $\neg\varphi \in \Gamma_\infty$ па следи да је $\Gamma_\infty \vdash \neg\varphi$, што противречи конзистентности од Γ_∞).

Коначно, служећи се скупом Γ_∞ изградићемо структуру $\mathfrak{A}$ и валуацију $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$. Нека је $\mathscr{T}$ скуп терама језика $\mathscr{L}'$. Дефинишемо релацију $\approx$ на скупу $\mathscr{T}$ овако:

$$t \approx s \Leftrightarrow t = s \in \Gamma_\infty.$$

Тврђење 9.0.2. $\approx$ је релација еквиваленције на скупу $\mathscr{T}$.

Доказ. Имамо да је $\vdash \forall x(x = x)$ на основу аксиоме $\mathbf{A_7}$, па на основу аксиоме $\mathbf{A_4}$ следи да је $\vdash t = t$, за произвољан терм t. Дакле, $t \approx t$, па је релација $\approx$ рефлексивна.

Даље, имамо да је

$$\vdash \forall x \forall y(x = y \to y = x)$$

применом аксиоме $\mathbf{A_8}$. Да бисмо то видели, посматрајмо атомску формулу $x = x$. Формула

$$x = y \to (x = x \to x = y)$$

је инстанца аксиоме $\mathbf{A_8}$. Пошто је $\vdash x = x$, једноставно следи да је $\vdash x = y \to y = x$. На основу аксиоме $\mathbf{A_4}$ следи да је

$$\vdash t = s \to s = t.$$

Дакле, ако је $t \approx s$, тј. $t = s \in \Gamma_\infty$, онда $\Gamma_\infty \vdash s = t$, па је тиме $s = t \in \Gamma_\infty$ и $s \approx t$. Дакле, $t \approx s$ повлачи $s \approx t$, па је релација $\approx$ симетрична.

Претпоставимо на крају да је $t \approx s$ и $s \approx u$. Другим речима $t = s, s = u \in \Gamma_\infty$. Довољно ће бити да покажемо да је

$$\vdash \forall x \forall y \forall z((x = y) \to ((y = z) \to (x = z)))$$

пошто на основу аксиоме $\mathbf{A_4}$ (где бирамо променљиве x, y и z које нису у t, s и u) следи да

$$\vdash (t = s) \to ((s = u) \to (t = u)),$$

па је тако $\Gamma_\infty \vdash t = u$. То је, међутим, једноставно показати, јер на основу аксиоме $\mathbf{A_8}$, ако посматрамо атомску формулу $y = z$, и замењујући јављања од y са x као у $\mathbf{A_8}$, имаћемо да важи

$$\vdash (y = x) \to ((y = z) \to (x = z)).$$

Пошто смо већ показали да имамо $\vdash x = y \to y = x$, следи да је

$$\vdash (x = y) \to ((y = z) \to (x = z)).$$

$\dashv$

У наставку ћемо са $[t] = [t]_\approx$ да означавамо класу еквиваленције терма t језика $\mathscr{L}'$ у односу на релацију $\approx$. Узмимо сада да је домен наше структуре $\mathfrak{A}$ количнички скуп:

$$A = \{[t] \mid t \in \mathscr{T}\}.$$

Другим речима, имамо да је $A = \mathscr{T}/_\approx$.

Ако је $x \in \mathsf{V}_{\mathscr{L}} = \mathsf{V}_{\mathscr{L}'}$ променљива, узећемо да је индивидуална валуација дата са $\mathfrak{s}(x) = [x]$, а индивидуалне константе c језика $\mathscr{L}'$ ћемо да интерпретирамо овако:

$$\mathsf{c}^{\mathfrak{A}} = [\mathsf{c}].$$

Преостаје нам, дакле, да дефинишемо интерпретације $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}}$ и $\mathsf{f}^{\mathfrak{A}}$ – релацијских и функцијских симбола тог језика. То ћемо да урадимо на следећи начин:

(1) $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}} = \{([t_1], \dots, [t_n]) \in A^n \mid \mathsf{R}t_1 \dots t_n \in \Gamma_\infty\}$, за сваки $n-$арни симбол $\mathsf{R} \in \mathsf{Rel}^{\mathscr{L}}$,
(2) $\mathsf{f}^{\mathfrak{A}}([t_1], \dots, [t_n]) = [\mathsf{f}t_1 \dots t_n]$, за сваки $n-$арни симбол $\mathsf{f} \in \mathsf{Fun}^{\mathscr{L}}$;

Међутим, сада морамо овде да покажемо да су ти појмови добро дефинисани. Претпоставимо да је $t_1 \approx s_1, \dots, t_n \approx s_n$ и да важи $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}}([t_1], \dots, [t_n])$, тј. $\mathsf{R}t_1 \dots t_n \in \Gamma_\infty$. На основу *Леме о генерализацији* (8.3), *Теореме дедукције* (8.1) и аксиоме $\mathbf{A_8}$ имамо да је

$$\vdash \forall y_1 \dots y_n \forall z_1 \dots z_n ((y_1 = z_1) \to \dots (y_n = z_n) \to (\mathsf{R}y_1 \dots y_n \to \mathsf{R}z_1 \dots z_n) \dots).$$

Променљиве y_i и z_i смо могли да одаберемо тако да се оне не јављају у t_i, нити у s_i. Из аксиоме $\mathbf{A_4}$ онда следи да је

$$\vdash ((t_1 = s_1) \to \dots (t_n = s_n) \to (\mathsf{R}t_1 \dots t_n \to \mathsf{R}s_1 \dots s_n) \dots).$$

Пошто је $\Gamma_\infty \vdash t_i = s_i$, имамо да је

$$\Gamma_\infty \vdash \mathsf{R}s_1 \dots s_n.$$

Дакле, следи да важи

$$\mathsf{R}s_1 \dots s_n \in \Gamma_\infty.$$

Слично се поступа и у случају интерпретације функцијских симбола где би, под претпоставком да је $t_1 \approx s_1, \dots, t_n \approx s_n$ и да је f један $n-$арни функцијски симбол нашег језика, требало да покажемо да важи:

$$\Gamma_\infty \vdash \mathsf{f}t_1 \dots t_n = \mathsf{f}s_1 \dots s_n.$$

Као и у претходном случају, одатле ће да следи да је:

$$\mathsf{f}t_1 \dots t_n = \mathsf{f}s_1 \dots s_n \in \Gamma_\infty,$$

односно $\mathsf{f}t_1 \dots t_n \approx \mathsf{f}s_1 \dots s_n$.

Сада када имамо на располагању једну добро дефинисану структуру $\mathfrak{A} = (A; \mathsf{R}_i^{\mathfrak{A}}, \mathsf{f}_i^{\mathfrak{A}}, \mathsf{c}_i^{\mathfrak{A}})$ и индивидуалну валуацију $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$, прво ћемо да покажемо да за сваки терм t нашег језика имамо да важи: $\bar{\mathfrak{s}}(t) = [t]$.

За индивидуалне променљиве имамо да је

$$\bar{\mathfrak{s}}(x) = \mathfrak{s}(x) = [x].$$

Такође, за сваку индивидуалну константу c имамо да важи:

$$\bar{\mathfrak{s}}(\mathsf{c}) = \mathsf{c}^{\mathfrak{A}} = [\mathsf{c}].$$

На крају, претпоставимо да је f један $n-$арни функцијски симбол нашег језика и да су $t_1, \dots, t_n$ терми такви да је $\bar{\mathfrak{s}}(t_i) = [t_i]$, за свако $1 \leq i \leq n$. Онда ће важити:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{z}}(\mathsf{f}t_1 \dots t_n) &= \mathsf{f}^{\mathfrak{A}}(\bar{\mathfrak{z}}(t_1), \dots, \bar{\mathfrak{z}}(t_n)) \\ &= \mathsf{f}^{\mathfrak{A}}([t_1], \dots, [t_n]) \\ &= [\mathsf{f}t_1 \dots t_n].\end{aligned}$$

Дакле, за сваки терм t важи $\bar{\mathfrak{z}}(t) = [t]$.

Тврђење 9.0.3. За сваку формулу φ језика $\mathscr{L}'$ имамо да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{z}) \models \varphi$ ако и само ако $\varphi \in \Gamma_\infty$.

Доказ. Тврђење доказујемо индукцијом по сложености формуле φ. Ако је φ атомска формула облика $\varphi = \mathsf{R}t_1 \dots t_n$, онда је

$$\begin{aligned}\mathsf{R}t_1 \dots t_n \in \Gamma_\infty &\Leftrightarrow ([t_1], \dots, [t_n]) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \\ &\Leftrightarrow (\bar{\mathfrak{z}}(t_1), \dots, \bar{\mathfrak{z}}(t_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{z}) \models \mathsf{R}t_1 \dots t_n.\end{aligned}$$

Ако је φ облика $t_1 = t_2$, онда имамо

$$\begin{aligned}t_1 = t_2 \in \Gamma_\infty &\Leftrightarrow [t_1] = [t_2] \\ &\Leftrightarrow \bar{\mathfrak{z}}(t_1) = \bar{\mathfrak{z}}(t_2) \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{z}) \models t_1 = t_2.\end{aligned}$$

Ако је формула φ облика $\neg\psi$ а тврђење важи за формулу ψ, онда имамо

$$\begin{aligned}\neg\psi \in \Gamma_\infty &\Leftrightarrow \psi \notin \Gamma_\infty \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{z}) \not\models \psi \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{z}) \models \neg\psi.\end{aligned}$$

Еквиваленција у првом реду горе је оправдана на основу максималности од Γ_∞, баш као и у случају исказне логике, док са првог на други ред можемо да пређемо на основу индуктивне хипотезе.

Ако је формула φ облика $\psi \to \sigma$ а тврђење важи за ψ и σ, онда имамо

$$\begin{aligned}\psi \to \sigma \in \Gamma_\infty &\Leftrightarrow \psi \notin \Gamma_\infty \text{ или } \sigma \in \Gamma_\infty \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{z}) \not\models \psi \text{ или } (\mathfrak{A}, \mathfrak{z}) \models \sigma \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{z}) \models \psi \to \sigma.\end{aligned}$$

Као и у претходном случају, у првом смо реду закључивали на основу максималности скупа Γ_∞, док смо са првог на други ред могли да пређемо на основу индуктивне хипотезе.

Претпоставимо на крају да је $\varphi = \forall x\psi$. Узмимо да $\varphi \in \Gamma_\infty$. Оно што сада треба да покажемо јесте да важи

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\psi.$$

Да бисмо то учинили, посматрајмо произвољно $[t] \in A$. Требало би да покажемо да важи:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow [t]]) \models \psi.$$

То ћемо да урадимо на следећи начин. На основу Леме 8.4, нека је формула ψ' алфабетска варијанта од ψ таква да је $\psi \vdash \psi'$ и $\psi' \vdash \psi$, као и да је терм t слободан за супституцију место x у формули ψ'.

Онда ћемо имати да важи:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow [t]]) \models \psi &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow [t]] \models \psi' \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models (\psi')^x_t.\end{aligned}$$

Друга од еквиваленција горе важи на основу Леме 7.3. Онда, на основу индуктивне хипотезе имамо да је

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models (\psi')^x_t \Leftrightarrow (\psi')^x_t \in \Gamma_\infty.$$

Међутим, како смо претпоставили да $\varphi = \forall x\psi \in \Gamma_\infty$, из тога ће да следи да $\forall x\psi' \in \Gamma_\infty$. То је зато што на основу *Леме о генерализацији* (8.3) из $\psi \vdash \psi'$ можемо да закључимо $\forall x\psi \vdash \forall x\psi'$, а скуп Γ_∞ је дедуктивно затворен. Пошто је терм t слободан за супституцију место x у ψ', на основу аксиоме $\mathbf{A_4}$ следи да је $\forall x\psi' \vdash (\psi')^x_t$. На основу тога можемо да закључимо да $(\psi')^x_t \in \Gamma_\infty$ па је:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\psi.$$

Претпоставимо с друге стране да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\psi$. Оно што би требало да покажемо јесте да је

$$\forall x\psi \in \Gamma_\infty.$$

Претпоставимо зато да ово последње није случај. Онда на основу максималности од Γ_∞ имамо да је $\neg\forall x\psi \in \Gamma_\infty$, па је и $\exists x\neg\psi \in \Gamma_\infty$. Међутим, имамо да је

$$\exists x\neg\psi \to \neg\psi^x_{\mathsf{c}}$$

Једна од Хенкинових формула скупа Γ'. Одатле следи да је $\Gamma_\infty \vdash \neg\psi^x_{\mathsf{c}}$. Овде је c један од нових симбола константи језика $\mathscr{L}'$, који се не јавља у ψ. Пошто је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \forall x\psi$, следи да је

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}[x \rightsquigarrow [\mathsf{c}]]) \models \psi.$$

Међутим, како је c слободно за супституцију место x у ψ, имамо да је

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \psi^x_{\mathsf{c}}.$$

То нам онда, на основу индуктивне хипотезе, даје $\psi^x_{\mathsf{c}} \in \Gamma_\infty$, што је немогуће. Дакле, можемо да закључимо да је $\forall x\psi \in \Gamma_\infty$. $\dashv$

Овим је доказ Тврђења 9.0.3 завршен. Сада треба само да приметимо да ако ограничимо структуру за Γ' који смо горе конструисали на језик $\mathscr{L}$, добићемо структуру која задовољава наш почетни скуп формула Γ за индивидуалну валуацију $\mathfrak{s}$. Тиме је завршен и доказ *Теореме потпуности* (9.1). $\dashv$

Последица 9.1.1. *Нека је* Γ *скуп формула и* φ *формула језика* $\mathscr{L}$. *Онда важи:*

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

Доказ. Здесна на лево ово је само *Теорема ваљаности* (8.5). С лева на десно, закључујемо као на почетку овог одељка. $\dashv$

10. Последице теореме потпуности

Прва последица конструкције из нашег доказа *Теореме потпуности* (9.1) коју ћемо овде да наведемо је доказ *Левенхајм-Сколемове теореме* (6.6) за пребројиве језике који се не позива на појам елементарне подструктуре.

Последица 10.0.1. *Претпоставимо да је* $\mathscr{L}$ *пребројив језик првог реда и да је* Γ *конзистентан скуп формула тог језика. Онда* Γ *има пребројив модел.*

Доказ. Приметимо да ако је језик $\mathscr{L}$ пребројив, онда је то и језик $\mathscr{L}'$ из доказа *Теореме потпуности* (9.1). То је зато што смо тај језик изградили, пошавши од $\mathscr{L}$, додавањем само пребројиво много индивидуалних константи. Из тога следи да је и скуп $\mathscr{T}$ терама тог језика такође пребројив. Међутим, структуру $\mathfrak{A}$ из доказа теореме потпуности смо изградили тако да за њен домен важи $A = \mathscr{T}/_{\approx}$. Дакле, структура $\mathfrak{A}$ је пребројива па је самим тим пребројива и њена рестрикција на језик $\mathscr{L}$. $\dashv$

Вотов тест. Узмимо сада да је Σ скуп реченица језика првог реда $\mathscr{L}$. Присетимо се да за Σ кажемо да је потпун ако за сваку реченицу σ језика од Σ имамо да важи $\sigma \in \Sigma$ или $\neg\sigma \in \Sigma$. Следеће тврђење може да нам помогне када желимо да проверимо да ли Σ има то својство.

Теорема 10.1 (Вотов тест). *Претпоставимо да је* $\mathscr{L}$ *пребројив језик првог реда и* Σ *дедуктивно затворен скуп реченица тог језика који има модел и чији су сви пребројиви модели изоморфни. Онда је* Σ *потпун.*

Доказ. Претпоставимо да Σ није потпун. Онда, пошто је Σ дедуктивно затворен, постоји неко σ за које важи $\Sigma \nvdash \sigma$ и $\Sigma \nvdash \neg\sigma$. На основу *Левенхајм-Сколемове теореме* (10.0.1) следи да постоји пребројив модел $\mathfrak{A}$ од Σ такав да важи $\mathfrak{A} \not\models \sigma$ као и пребројив модел $\mathfrak{B}$ од Σ такав да важи $\mathfrak{B} \not\models \neg\sigma$. Дакле, $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$ и $\mathfrak{B} \models \sigma$, али по претпоставци имамо да је $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, што је немогуће. $\dashv$

Присетимо се да смо у Примеру 5.3 конструисали скуп реченица језика $\mathscr{L}_\emptyset$:

$$\Sigma = \{\sigma_{\geq 1}, \sigma_{\geq 2}, \sigma_{\geq 3}, \dots\}.$$

Модели од Σ су бесконачни скупови а сви пребројиви модели од Σ су изоморфни са $\mathbb{N}$. Дакле, на основу претходне теореме, знамо да је скуп Σ потпун.

Да бисмо дали један мање тривијалан пример, посматрајмо густа линеарна уређења без крајњих тачака из Примера 5.4. Примере таквих структура чине скупови рационалних и реалних бројева са уобичајеним уређењима на њима.

Теорема 10.2. *Свака два пребројива густа линеарна уређења без крајњих тачака су изоморфна.*

Доказ. Узмимо да су $(A;<)$ и $(B;<)$ два пребројива густа линеарна уређења без крајњих тачака и да смо индексирали њихове елементе овако $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Дефинишимо прво скупове

$$A_0 = \{a_0\} \qquad B_0 = \{b_0\},$$

и нека је $f_0 : A_0 \to B_0$ функција дефинисана са $f_0(a_0) = b_0$. Претпоставимо сада, за доказ индукцијом, да смо дефинисали функцију $f_n : A_n \to B_n$ такву да су следећи услови задовољени:

(1) $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq A_n \subseteq A$,
(2) $\{b_0, \dots, b_n\} \subseteq B_n \subseteq B$,
(3) $f_n : A_n \to B_n$ је бијекција која чува поредак.

Сада треба да функцију f_n проширимо до одговарајуће функције f_{n+1}.

Ако је $a_{n+1} \in A_n$, онда ћемо да узмемо да је $A'_n = A_n$, $B'_n = B_n$ и $f'_n = f_n$. У супротном, претпоставимо да је, примера ради

$$c_0 < c_1 < \cdots < c_i < a_{n+1} < c_{i+1} < \cdots < c_m$$

где је $A_n = \{c_0, \dots, c_m\}$. Узмимо неки елемент скупа B такав да је $f_n(c_i) < b < f_n(c_{i+1})$ и дефинишимо:

$$\begin{aligned} A'_n &= A_n \cup \{a_{n+1}\} \\ B'_n &= B_n \cup \{b\} \\ f'_n &= f_n \cup \{(a_{n+1}, b)\}. \end{aligned}$$

Ако је $b_{n+1} \in B'_n$, онда ћемо да узмемо да је $A_{n+1} = A'_n$, $B_{n+1} = B'_n$ и $f_{n+1} = f'_n$. Иначе, претпоставимо да је

$$d_0 < d_1 < \cdots < d_j < b_{n+1} < d_{j+1} < \cdots < d_k$$

где је $B'_n = \{d_0, \dots, d_k\}$. Узмимо сада елемент од A такав да је $(f'_n)^{-1}(d_j) < a < (f'_n)^{-1}(d_{j+1})$ и дефинишимо:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A'_n \cup \{a\} \\ B_{n+1} &= B'_n \cup \{b_{n+1}\} \\ f_{n+1} &= f'_n \cup \{(a, b_{n+1})\}. \end{aligned}$$

На крају, можемо да узмемо да је $f = \bigcup_{n\geq 0} f_n$. Функција $f : A \to B$ ће онда бити тражени изоморфизам. $\dashv$

Узмимо сада да је Σ скуп аксиома густих линеарних уређења без крајњих тачака на језику $\mathscr{L} = \{<\}$. На основу *Вотовог теста* (10.1) и теореме коју смо управо доказали можемо да закључимо да је Σ потпун.

Као и у случају исказне логике, *Теорема потпуности* (9.1) има за једноставну последицу *Теорему компактности* логике првог реда. *Теорема компактности* може да се докаже и директно, помоћу појма *ултрапроизвода*. Тај доказ овде нећемо давати, него ћемо да покажемо како *Теорема компактности* следи из *Теореме потпуности* (9.1) чији смо доказ дали у претходном одељку. Присетимо се да *Теорема компактности* каже:

Теорема 10.3 (Теорема компактности). *Нека је $\mathscr{L}$ језик првог реда и Γ скуп формула овог језика. Скуп Γ је задовољив, тј. постоји структура $\mathfrak{A}$ и индивидуална валуација $\mathfrak{s} : \mathsf{V} \to A$ такви да важи $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \varphi$, за свако $\varphi \in \Gamma$, ако и само ако је сваки његов коначан подскуп $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ задовољив.*

Доказ. Да бисмо доказали нетривијални смер ове еквиваленције, претпоставимо да је сваки коначан $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ задовољив. Ако Γ није задовољив, онда $\Gamma \models \phi$, за сваку формулу ϕ, па је и $\Gamma \models \bot$. На основу *Теореме потпуности* (9.1) следи да $\Gamma \vdash \bot$, па је скуп Γ инконзистентан. Пошто су докази коначни, имамо да је $\Gamma_0 \vdash \bot$, за неко коначно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Међутим, онда на основу *Теореме ваљаности* (8.5) следи да је $\Gamma_0 \models \bot$, што је немогуће пошто је скуп Γ_0 по претпоставци задовољив. $\dashv$

Да бисмо илустровали употребу *Теореме компактности*, узмимо да је Γ скуп формула језика $\mathscr{L}$ који има произвољно велике коначне моделе, тј. за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји модел $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s})$ од Γ такав да је $|A| > n$. Показаћемо да онда Γ има бесконачан модел. Да бисмо то показали, нека су $\sigma_{\geq n}$ реченице дефинисане као у Примеру 5.3. Посматрајмо сада скуп

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{\sigma_{\geq n} \mid n \geq 2\}.$$

Тврдимо да је сваки коначан подскуп скупа Γ' задовољив. Да бисмо то видели узмимо произвољан коначан подскуп $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma$. Онда можемо да узмемо неко $N \in \mathbb{N}$ такво да важи:

$$\Gamma'_0 \subseteq \Gamma \cup \{\sigma_{\geq n} \mid 2 \leq n \leq N\}.$$

На основу претпоставке можемо да узмемо модел $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s})$ од Γ такав да је $|A| > N$. Пошто је $|A| > N$, следи да ћемо имати $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}) \models \sigma_{\geq n}$, за свако $n \leq N$, па је $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s})$ модел од Γ'_0. Дакле, сваки коначан подскуп од Γ' је задовољив. На основу *Теореме компактности* следи да је и сам скуп Γ' задовољив. Нека је $(\mathfrak{A}', \mathfrak{s})$ модел од Γ'. Онда ћемо имати да је $(\mathfrak{A}', \mathfrak{s})$ модел од Γ и приде је A' бесконачан – јер је домен модела свих $\sigma_{\geq n}$, за $n \geq 2$.

Још један начин да исто тврђење докажемо био би проширивањем језика $\mathscr{L}$ новим индивидуалним константама. Узмимо да је $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{\mathsf{c}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, где је свако c_i нова индивидуална константа. Узмимо сада да је

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{\mathsf{c}_i \neq \mathsf{c}_j \mid i, j \in \mathbb{N} \text{ и } i \neq j\}.$$

Као и горе, тврдимо да је сваки коначан подскуп од Γ' задовољив. Да бисмо то видели, узмимо неко коначно $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma'$ и фиксирајмо неко довољно велико $N \in \mathbb{N}$ тако да важи:

$$\Gamma'_0 \subseteq \Gamma \cup \{\mathsf{c}_i \neq \mathsf{c}_j \mid i, j \leq N \text{ и } i \neq j\}.$$

На основу претпоставке, можемо да узмемо модел $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s})$ од Γ, такав да је $|A| > N$. Узмимо сада да је $\mathfrak{A}'$ структура језика $\mathscr{L}'$ коју добијамо из структуре $\mathfrak{A}$ тако што ћемо да интерпретирамо константе $\mathsf{c}_0, \ldots, \mathsf{c}_N$ као различите елементе од A, док ћемо свако c_i, за $i > N$, да интерпретирамо сасвим произвољно. Онда ћемо имати да је $(\mathfrak{A}', \mathfrak{s})$ модел од Γ'_0, па је сваки коначан подскуп од Γ' задовољив.

На основу *Теореме компактности* (10.3) онда следи да је и сам скуп Γ' задовољив. Нека је $(\mathfrak{A}', \mathfrak{s})$ модел од Γ'. Ако сада узмемо да је $\mathfrak{A}$ рестрикција од $\mathfrak{A}'$ на језик $\mathscr{L}$, онда ће $(\mathfrak{A}, \mathfrak{s})$ да буде модел од Γ.

Нестандардни модел аритметике. У наставку ћемо да се послужимо *Теоремом компактности* (10.3) да бисмо конструисали неизоморфне моделе теорије природних бројева. Последица овакве конструкције биће такозвани *нестандардни модел* аритметике. Присетимо се да је $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; <, +, \cdot, S, 0)$ структура природних бројева са уобичајеном релацијом уређења $<$, као и бинарним операцијама сабирања, множења и унарном операцијом следбеника $(n \mapsto n+1)$. Одговарајући језик ове структуре је $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}} = \{\boldsymbol{<}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot}, \mathbf{S}, \mathbf{0}\}$.

Такође, ако је $\mathscr{L}$ језик првог реда и $\mathfrak{A}$ структура тог језика, онда са $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ означавамо теорију од $\mathfrak{A}$, тј. скуп реченица σ језика $\mathscr{L}$ таквих да важи $\mathfrak{A} \models \sigma$.

Теорема 10.4. *Нека је $\mathscr{L}$ језик аритметике и нека је* $\mathsf{Th}(\mathfrak{N})$ *теорија од* $\mathfrak{N}$ *за језик* $\mathscr{L}$. *Онда постоји пребројив модел од* $\mathsf{Th}(\mathfrak{N})$ *који није изоморфан са* $\mathfrak{N}$.

Доказ. Нека је $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{\mathsf{c}\}$, где је c нови симбол константе. Узмимо сада да је

$$\Gamma = \mathsf{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

где је $\sigma_n = \mathsf{c} > \mathbf{S}^n\mathbf{0}$. Сваки коначан подскуп Γ_0 од Γ је задовољив. То можемо да видимо тако што ћемо узети да је $\mathfrak{s}(\mathsf{c}) = N$, за неко довољно велико $N \in \mathbb{N}$ које је веће од сваког k таквог да се $\mathsf{S}^k\mathbf{0}$ јавља у Γ_0.

На основу *Теореме компактности* (10.3), Γ има модел, а на основу *Левенхајм-Сколемове теореме* (10.0.1) знамо да постоји и модел овог скупа реченица који је пребројив. Нека је $\mathfrak{A}'$ један такав модел скупа Γ. Ако сада узмемо рестрикцију $\mathfrak{A}$ модела $\mathfrak{A}'$ на наш почетни језик $\mathscr{L}$, онда ћемо имати да је $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$ (тј, да су ове структуре елементарно еквивалентне), пошто је $\mathfrak{A}$ модел теорије $\mathsf{Th}(\mathfrak{N})$:

$$\mathfrak{N} \models \sigma \Rightarrow \sigma \in \mathsf{Th}(\mathfrak{N}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \sigma,$$
$$\mathfrak{N} \not\models \sigma \Rightarrow \neg\sigma \in \mathsf{Th}(\mathfrak{N}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \sigma.$$

Међутим, $\mathfrak{A}$ не може бити изоморфан са $\mathfrak{N}$ јер у A постоји елемент $\mathsf{c}^{\mathfrak{A}}$ за који важи да је $\mathsf{c}^{\mathfrak{A}} > S^n(0)$ (сваки изоморфизам ће да фиксира све $S^n(0)$), за сваки природан број n, а такав елемент у $\mathbb{N}$ наравно не постоји. $\dashv$

Напомена. Претходну теорему би, да бисмо били прецизни, требало да посматрамо као теорему неке метатеорије у којој је стандардни модел $\mathfrak{N}$ дефинисан и у којој могу да се дефинишу и други релевантни појмови, као што је појам пребројивих модела. Рецимо, могли бисмо да узмемо да је та позадинска теорија **ZFC**, која дефинише скуп $\mathbb{N}$ као скуп свих коначних ординала, и унутар које доказ Теореме 10.4 може да се формализује.

Као непосредну последицу Теореме 10.4 имамо да природне бројеве не можемо да *аксиоматизујемо*, тј. да дамо један скуп формула Γ у језику аритметике (или неком другом, ширем језику) такав да је $\mathfrak{N}$ до на изоморфизам јединствена пребројива структура која задовољава Γ.

Моделе $\mathfrak{N}'$ теорије $\mathsf{Th}(\mathfrak{N})$ који нису изоморфни са $\mathfrak{N}$ зваћемо *нестандардним моделима* аритметике. Структуру $\mathfrak{N}$ ћемо, као и раније, да зовемо стандардним моделом (в. напомену горе). Из дефиниције нестандардног модела $\mathfrak{N}'$ следи да је $\mathfrak{N}' \equiv \mathfrak{N}$.

Следеће тврђење нам даје нека основна својства структуре нестандардних модела аритметике. Узмимо сада да је $\mathfrak{N}'$ један такав пребројив модел. Његов ћемо домен да означавамо са $\mathbb{N}'$. Под $\mathbb{Z}-$*ланцем* у $\mathfrak{N}'$ ћемо да подразумевамо подскуп $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ од $\mathbb{N}'$ такав да за свако $i \in \mathbb{Z}$, не постоји елемент $x \in \mathbb{N}'$ такав да је $a_i < x < a_{i+1}$ (овде $<=<^{\mathfrak{N}'}$ означава уређење на $\mathfrak{N}'$).

Теорема 10.5. *Нека је $\mathfrak{N}'$ нестандардни модел аритметике. Онда важи:*

(1) $\mathfrak{N}'$ има иницијални сегмент изоморфан стандардном моделу $\mathfrak{N}$.

(2) Елементи модела $\mathfrak{N}'$ који нису у овом иницијалном сегменту чине један густ скуп $\mathbb{Z}-$ланаца који нема најмањи нити највећи елемент.

Доказ. Да бисмо ово тврђење доказали, стално ћемо да се позивамо на чињеницу да је $\mathfrak{N}' \equiv \mathfrak{N}$. Прво, $\mathbf{0}^{\mathfrak{N}}$ је најмањи елемент од $\mathfrak{N}$, тј.

$$\mathfrak{N} \models \forall x(\mathbf{0} < x).$$

Дакле, $\mathfrak{N}'$ задовољава исту ту реченицу па је $\mathbf{0}^{\mathfrak{N}'}$ најмањи елемент од $\mathfrak{N}'$. Слично томе, $(\mathbf{S0})^{\mathfrak{N}}$ је најмањи елемент од $\mathfrak{N}$ већи од $\mathbf{0}^{\mathfrak{N}}$, тј.

$$\mathfrak{N} \models \forall x(\mathbf{0} < x \to (x = \mathbf{S0} \lor \mathbf{S0} < x)).$$

Пошто $\mathfrak{N}'$ задовољава исту ту реченицу, следи да је $(\mathbf{S0})^{\mathfrak{N}'}$ најмањи елемент од $\mathfrak{N}'$ већи од $\mathbf{0}^{\mathfrak{N}'}$.

Ако наставимо на овај начин, можемо да видимо да пресликавање $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$, дефинисано као

$$\pi((\mathbf{S}^n\mathbf{0})^{\mathfrak{N}}) = (\mathbf{S}^n\mathbf{0})^{\mathfrak{N}'},$$

чува поредак и да је бијекција између $\mathbb{N}$ и иницијалног сегмента од $\mathbb{N}'$. Такође, ово π је хомоморфизам из $\mathfrak{N}$ у $\mathfrak{N}'$. Примера ради,

$$\mathfrak{N} \models \mathbf{S}^n\mathbf{0} + \mathbf{S}^m\mathbf{0} = \mathbf{S}^{n+m}\mathbf{0},$$

па и $\mathfrak{N}'$ задовољава ову реченицу. Дакле,

$$(\mathbf{S}^n\mathbf{0})^{\mathfrak{N}'} + (\mathbf{S}^m\mathbf{0})^{\mathfrak{N}'} = (\mathbf{S}^{n+m}\mathbf{0})^{\mathfrak{N}'}.$$

Другим речима,

$$\pi((\mathbf{S}^n\mathbf{0})^{\mathfrak{N}}) + \pi((\mathbf{S}^m\mathbf{0})^{\mathfrak{N}}) = \pi((\mathbf{S}^{n+m}\mathbf{0})^{\mathfrak{N}}).$$

Нека скуп I чине сви елементи од $\mathbb{N}'$ који нису у скупу $\pi[\mathbb{N}]$. То су, такозвани, *бесконачни елементи* од $\mathbb{N}'$. Пошто је π изоморфизам између $\mathfrak{N}$ и $\pi[\mathbb{N}]$, можемо ово $\pi[\mathbb{N}]$ да идентификујемо са $\mathbb{N}$ и да пишемо просто $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup I$, где је $\mathbb{N}$ иницијални сегмент од $\mathbb{N}'$.

Другим речима, увек ћемо имати да је $k < c$, за свако $k \in \mathbb{N}$ и $c \in I$.

Остаје да се покаже да I чини густ скуп $\mathbb{Z}-$ланаца који нема најмањи нити највећи елемент. Приметимо прво да ако $c, d \in I$, онда $c + d \in I$. Такође, ако је $c, d \neq 0$, онда $c \cdot d \in I$. Ево зашто је то тако. Приметимо да:

$$\mathfrak{N} \models \forall x \forall y(x > \mathbf{0} \land y > \mathbf{0} \to (x + y > x \land x \cdot y \geq x)),$$

па $\mathfrak{N}'$ задовољава ову реченицу такође. Пошто је $c, d > 0$, имамо да је $c + d > c > S^k(0)$, за свако $k \in \mathbb{N}$, па је $c + d \in I$. Слично томе можемо да закључимо да је $c \cdot d \in I$. Пошто је

$$\mathfrak{N} \models \forall x(x > \mathbf{0} \to \exists y(y + \mathbf{S0} = x \land \forall w \neg(y < w < x))),$$

имамо да и $\mathfrak{N}'$ задовољава ову реченицу, па c има непосредног претходника у $\mathfrak{N}'$. Овог ћемо претходника да означавамо са $c - S(0)$. Такође,

$$\mathfrak{N} \models \forall x((x + \mathbf{S0} > \mathbf{S}^{k+1}\mathbf{0}) \to x > \mathbf{S}^k\mathbf{0}),$$

па имамо, пошто је $c > S^{k+1}(0)$ за свако $k \in \mathbb{N}$, да је $c - S(0) > S^k(0)$ за свако такво k. Дакле, имамо да је $c - S(0) \in I$. Настављајући на овај начин, добијамо један $\mathbb{Z}-$ланац $\{c \pm S^k(0)\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq I$.

Сада ћемо да покажемо да између два $\mathbb{Z}-$ланца увек постоји $\mathbb{Z}-$ланац. Претпоставимо да је $c < d$ и да су c и d елементи скупа I у различитим $\mathbb{Z}-$ланцима. Имамо да је

$$\mathfrak{N} \models \forall x \exists y(y + y = x \lor y + y = x + \mathbf{S0}),$$

па ова реченица важи у $\mathfrak{N}'$. Нека је онда $y \in \mathbb{N}'$ такво да је $y + y = c + d$ или $y + y = c + d + 1$. Рецимо да је друго случај, тј.

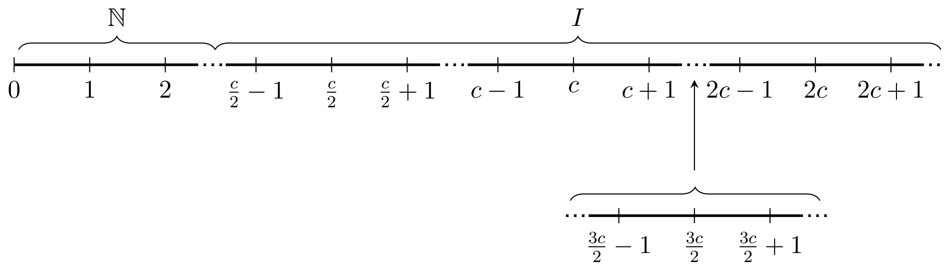
$$y + y = c + d + 1.$$

Онда имамо да је $y > c + S^k(0)$ еквивалентно са $y + y > c + c + S^{2k}(0)$. Међутим,

$$y + y = c + d + 1 > c + c + S^{2k}(0),$$

пошто је $d > c + S^{2k}(0)$. Овде смо се поново служили чињеницом да неко тврђење важи у $\mathfrak{N}$ ако и само ако важи у $\mathfrak{N}'$. Сличним аргументом можемо да покажемо да постоји y такво да је $y + y = c$ или $y + y = c + 1$ и да је $\mathbb{Z}-$ланац од y мањи од $\mathbb{Z}-$ланца од c. Такође, $\mathbb{Z}-$ланац од $d + d$ већи је од $\mathbb{Z}-$ланца од d. Дакле, не постоји најмањи нити највећи $\mathbb{Z}-$ланац. $\dashv$

Свака два пребројива густа линеарна уређења без крајњих тачака су изоморфна на основу Теореме 10.2 (сва су она изоморфна са $\mathbb{Q}$), па је тип уређења од I, за пребројив нестандардни модел $\mathfrak{N}'$,



Слика 2. Нестандардни модел $\mathfrak{N}'$

јединствено одређен као пребројиво много копија од $\mathbb{Z}$ уређених као $(\mathbb{Q}; <)$. На слици горе смо, илустрације ради, узели неки елемент c из I који је паран, тј. постоји $d \in I$ такво да је $c = 2d$. Претходника од c смо прегледности ради означавали са $c - 1$.

Библиографија

[1] Мирјана Борисављевић, ***Увод у логику, први део***, Универзитет у Београду, Саобраћајни факултет, Београд, 2009

[2] Мирјана Борисављевић, ***Увод у логику, други део***, Универзитет у Београду, Саобраћајни факултет, Београд, 2016

[3] Lou van den Dries, ***Mathematical Logic: Lecture Notes***, Urbana-Champaign, 2019 (доступно на адреси: `https://faculty.math.illinois.edu/~vddries`)

[4] Слободан Вујошевић и Жана Ковијанић, ***Увод у логику***, Универзитет Црне Горе, Подгорица, 2009

[5] Коста Дошен, ***Основна логика***, Београд, 2013 (доступно на адреси: `http://www.mi.sanu.ac.rs/~kosta/publications`)

[6] Herbert Enderton, ***A Mathematical Introduction to Logic, 2nd edition***, Academic Press, New York, 2001

[7] Igor Lavrov and Larisa Maksimova, ***Problems in Set Theory, Mathematical Logic and the Theory of Algorithms***, Kluwer Academic, New York, 2003

[8] Joseph Mileti, ***A Mathematical Introduction to Mathematical Logic***, Grinell, 2020 (доступно на адреси: `https://mileti.math.grinnell.edu`)

[9] Yiannis Moschovakis, ***Notes on Set Theory, 2nd edition***, Springer-Verlag, New York, 2006

[10] Александар Перовић, Александар Јовановић и Бобан Величковић, ***Теорија скупова***, Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, 2007

[11] Зоран Петрић, ***Увод у математичку логику***, Београд, 2016 (доступно на адреси: `http://www.mi.sanu.ac.rs/~zpetric/LOG`)

[12] Paul Halmos, ***Naive Set Theory***, Springer-Verlag, New York, 1974

[13] Peter Hinman, ***Fundamentals of Mathematical Logic***, A K Peters, Wellesley, 2005

Индекс

CIP - Каталогизација у публикацији, Народна библиотека Србије, Београд

Аџић, Милош, 1982 -

Белешке из логике: потпуност, компактност и последице [електронски извор] / Милош Аџић. Београд: Универзитет, Институт за филозофију, 2022 (Београд: Универзитет, Институт за филозофију). - 1 електронски оптички диск (CD-ROM); 12 цм

Системски захтеви: Нису наведени. - Доступно и на: `https://www.f.bg.ac.rs/en2/research/institute_for_philosophy/e-publications`. - Насл. са насловне стране документа. - Тираж 100. - Библиографија. - Регистар.

ISBN 978-86-6427-214-8

а) Логика исказа б) Математичка логика – Рачун предиката

COBISS.SR-ID 67198473

Ова је књига настала из бележака за курс Филозофија математике који сам, помажући Кости Дошену, више пута држао студентима завршне године студија Филозофског факултета у Београду. Курс је био замишљен тако да би се на предавањима, која су наликовала семинарима, читала и излагала класична дела из филозофије математике док су вежбе на том предмету студенте требало да упознају са Геделовим теоремама о непотпуности, филозофски најзанимљивијим резултатима логике. У овом, првом делу књиге *Белешке из логике* представићемо неке од класичних резултата нашег предмета, закључно са Теоремом потпуности логике првог реда и њеним последицама. Међутим, главно у вези са овом књигом је то што би она читаоца требало да припреми за други њен део који ће се тицати Геделових теорема о непотпуности и сродних резултата.